



RÉPUBLIQUE  
FRANÇAISE

*Liberté  
Égalité  
Fraternité*



# Analyse de sensibilité aux incertitudes d'estimation statistique et à l'identification d'un modèle probabiliste

---

*Rencontres MEXICO 2021 – 29/11/2021*

---

Charles Surget<sup>1,2</sup>  
[charles.surget@onera.fr](mailto:charles.surget@onera.fr)

Sylvain Dubreuil<sup>1</sup>, Jérôme Morio<sup>1</sup>, Cécile Mattrand<sup>2</sup>, Jean-Marc Bourinet<sup>2</sup>, Nicolas Gayton<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>ONERA/DTIS, F-31055 Toulouse, France

<sup>2</sup>SIGMA Clermont, Institut Pascal, F-63000 Clermont-Ferrand, France

# Plan

---

- I. Contexte
- II. Estimateurs
- III. Analyse de sensibilité
- IV. Application sur cas simple
- V. Synthèse et perspectives

# I. Contexte

---

Boîte noire

$\varphi$

$$\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

# I. Contexte

---

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^T \longrightarrow$$

avec  $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}$  continue

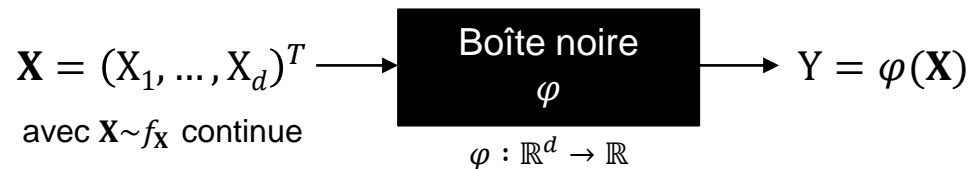
Boîte noire

$\varphi$

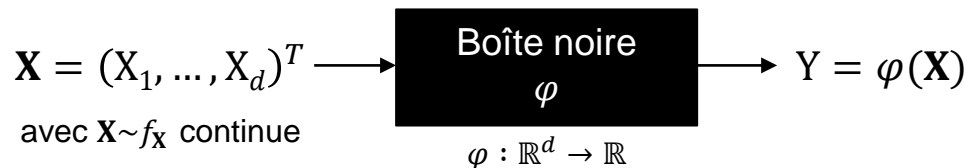
$$\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

# I. Contexte

---



# I. Contexte



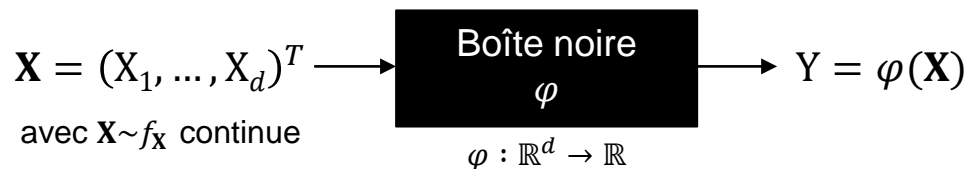
Un intérêt est porté à l'espérance d'une fonction particulière  $\tau(x)$  de la sortie telle que :

$$\mathbb{E}_{f_{\mathbf{X}}}(\tau(\varphi(\mathbf{X}))) = \int_{\mathbb{X}} \tau(\varphi(\mathbf{x})) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Par simplicité, on considèrera  $\tau(x)$  comme la fonction identité.

# I. Contexte

[1] SARAZIN, Gabriel. *Analyse de sensibilité fiabiliste en présence d'incertitudes épistémiques introduites par les données d'apprentissage*. 2021. Thèse de doctorat. Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace Toulouse.



Un intérêt est porté à l'**espérance** d'une fonction particulière  $\tau(x)$  de la sortie telle que :

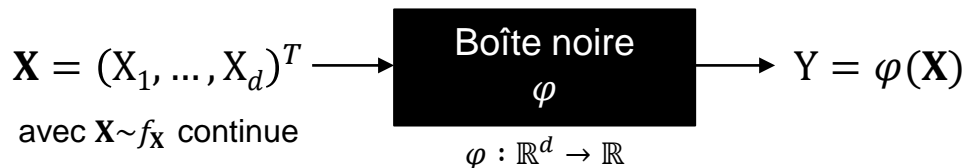
$$\mathbb{E}_{f_{\mathbf{X}}}(\tau(\varphi(\mathbf{X}))) = \int_{\mathbb{X}} \tau(\varphi(\mathbf{x})) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Par simplicité, on considèrera  $\tau(x)$  comme la fonction identité. Un estimateur Monte-Carlo (M.C.) est utilisé en considérant un  $N_{\mathbf{X}}$ -échantillon  $(\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(j)}, \dots, \mathbf{X}^{(N_{\mathbf{X}})})$  :

$$\hat{\mathbb{E}}_{f_{\mathbf{X}}}(\varphi(\mathbf{X})) = \frac{1}{N_{\mathbf{X}}} \sum_{j=1}^{N_{\mathbf{X}}} \varphi(\mathbf{X}^{(j)}) \text{ avec } \mathbf{X}^{(j)} \sim f_{\mathbf{X}}$$

# I. Contexte

[1] SARAZIN, Gabriel. *Analyse de sensibilité fiabiliste en présence d'incertitudes épistémiques introduites par les données d'apprentissage*. 2021. Thèse de doctorat. Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace Toulouse.



Un intérêt est porté à l'espérance d'une fonction particulière  $\tau(x)$  de la sortie telle que :

$$\mathbb{E}_{f_{\mathbf{X}}}(\tau(\varphi(\mathbf{X}))) = \int_{\mathbb{X}} \tau(\varphi(\mathbf{x})) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Par simplicité, on considèrera  $\tau(x)$  comme la fonction identité. Un estimateur Monte-Carlo (M.C.) est utilisé en considérant un  $N_{\mathbf{X}}$ -échantillon  $(\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(j)}, \dots, \mathbf{X}^{(N_{\mathbf{X}})})$  :

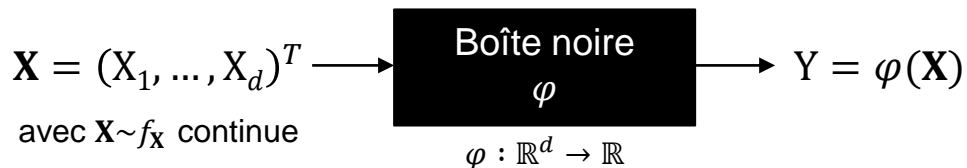
Source d'incertitude liée à l'échantillon de Monte Carlo

$$\hat{\mathbb{E}}_{f_{\mathbf{X}}}(\varphi(\mathbf{X})) = \frac{1}{N_{\mathbf{X}}} \sum_{j=1}^{N_{\mathbf{X}}} \varphi(\mathbf{X}^{(j)}) \text{ avec } \mathbf{X}^{(j)} \sim f_{\mathbf{X}}$$



# I. Contexte

[1] SARAZIN, Gabriel. *Analyse de sensibilité fiabiliste en présence d'incertitudes épistémiques introduites par les données d'apprentissage*. 2021. Thèse de doctorat. Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace Toulouse.



Un intérêt est porté à l'espérance d'une fonction particulière  $\tau(x)$  de la sortie telle que :

$$\mathbb{E}_{f_{\mathbf{X}}}(\tau(\varphi(\mathbf{X}))) = \int_{\mathbb{X}} \tau(\varphi(\mathbf{x})) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

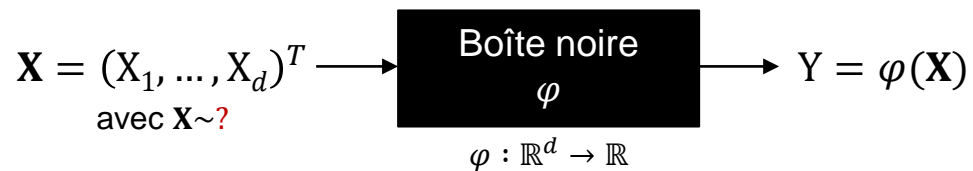
Par simplicité, on considèrera  $\tau(x)$  comme la fonction identité. Un estimateur Monte-Carlo (M.C.) est utilisé en considérant un  $N_{\mathbf{X}}$ -échantillon  $(\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(j)}, \dots, \mathbf{X}^{(N_{\mathbf{X}})})$  :

Source d'incertitude liée à l'échantillon de Monte Carlo

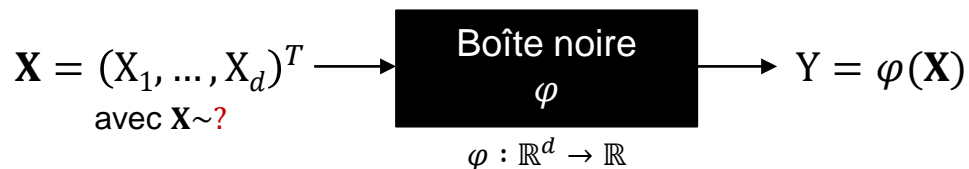
$$\hat{\mathbb{E}}_{f_{\mathbf{X}}}(\varphi(\mathbf{X})) = \frac{1}{N_{\mathbf{X}}} \sum_{j=1}^{N_{\mathbf{X}}} \varphi(\mathbf{X}^{(j)}) \text{ avec } \mathbf{X}^{(j)} \sim f_{\mathbf{X}}$$

Qu'en est-il lorsqu'il y a méconnaissance sur la loi  $f_{\mathbf{X}}$  ? [1]

# I. Contexte



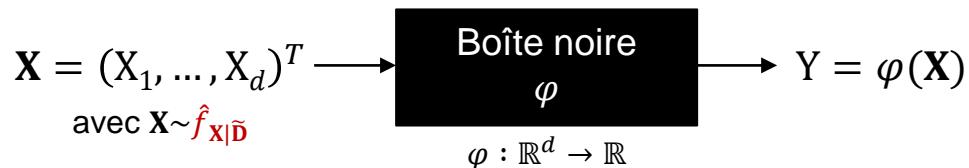
# I. Contexte



Considérons une base de données, un  $N_{\mathbf{D}}$ -échantillon de vecteurs aléatoires  $\mathbf{D}^{(i)}$  i.i.d. de même loi  $f_{\mathbf{X}}$  supposée inconnue :

$$\tilde{\mathbf{D}} := (\mathbf{D}^{(1)}, \dots, \mathbf{D}^{(i)}, \dots, \mathbf{D}^{(N_{\mathbf{D}})})$$

# I. Contexte

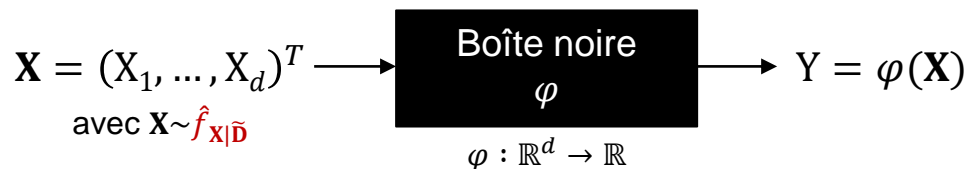


Considérons une base de données, un  $N_{\mathbf{D}}$ -échantillon de vecteurs aléatoires  $\mathbf{D}^{(i)}$  i.i.d. de même loi  $f_{\mathbf{X}}$  supposée inconnue :

$$\tilde{\mathbf{D}} := (\mathbf{D}^{(1)}, \dots, \mathbf{D}^{(i)}, \dots, \mathbf{D}^{(N_{\mathbf{D}})})$$

Une méthode d'identification est déployée afin d'estimer la loi  $f_{\mathbf{X}}$  par  $\hat{f}_{\mathbf{X}|\tilde{\mathbf{D}}}$ , conditionnée aux  $N_{\mathbf{D}}$  mesures à disposition.

# I. Contexte



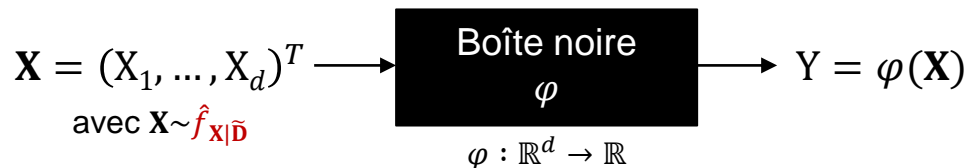
Considérons une base de données, un  $N_{\mathbf{D}}$ -échantillon de vecteurs aléatoires  $\mathbf{D}^{(i)}$  i.i.d. de même loi  $f_{\mathbf{X}}$  supposée inconnue :

$$\tilde{\mathbf{D}} := (\mathbf{D}^{(1)}, \dots, \mathbf{D}^{(i)}, \dots, \mathbf{D}^{(N_{\mathbf{D}})})$$

Une méthode d'identification est déployée afin d'estimer la loi  $f_{\mathbf{X}}$  par  $\hat{f}_{\mathbf{X}|\tilde{\mathbf{D}}}$ , conditionnée aux  $N_{\mathbf{D}}$  mesures à disposition. L'estimateur M.C. de l'espérance de la sortie est le suivant :

$$\hat{\mathbb{E}}_{\hat{f}_{\mathbf{X}|\tilde{\mathbf{D}}}}(\varphi(\mathbf{X})) = \frac{1}{N_{\mathbf{X}}} \sum_{j=1}^{N_{\mathbf{X}}} \varphi(\mathbf{X}^{(j)}) \text{ avec } \mathbf{X}^{(j)} \sim \hat{f}_{\mathbf{X}|\tilde{\mathbf{D}}}$$

# I. Contexte



Considérons une base de données, un  $N_{\mathbf{D}}$ -échantillon de vecteurs aléatoires  $\mathbf{D}^{(i)}$  i.i.d. de même loi  $f_{\mathbf{X}}$  supposée inconnue :

$$\tilde{\mathbf{D}} := (\mathbf{D}^{(1)}, \dots, \mathbf{D}^{(i)}, \dots, \mathbf{D}^{(N_{\mathbf{D}})})$$

Une méthode d'identification est déployée afin d'estimer la loi  $f_{\mathbf{X}}$  par  $\hat{f}_{\mathbf{X}|\tilde{\mathbf{D}}}$ , conditionnée aux  $N_{\mathbf{D}}$  mesures à disposition. L'estimateur M.C. de l'espérance de la sortie est le suivant :

Source d'incertitude liée à l'échantillon de Monte Carlo

$$\hat{\mathbb{E}}_{\hat{f}_{\mathbf{X}|\tilde{\mathbf{D}}}}(\varphi(\mathbf{X})) = \frac{1}{N_{\mathbf{X}}} \sum_{j=1}^{N_{\mathbf{X}}} \varphi(\mathbf{X}^{(j)}) \text{ avec } \mathbf{X}^{(j)} \sim \hat{f}_{\mathbf{X}|\tilde{\mathbf{D}}}$$

Source d'incertitude liée à l'échantillon de données initiales

# I. Contexte

---

① Comment quantifier la variance de cet estimateur M.C. ?

# I. Contexte

## ① Comment quantifier la variance de cet estimateur M.C. ?

Considérons l'espérance suivante prenant en compte la variabilité de la base de données :

$$\mathbb{E}_{f_{(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{D}})}}(\varphi(\mathbf{X})) = \int_{\mathbb{X}^{N_{\mathbf{D}}}} \int_{\mathbb{X}} \varphi(\mathbf{x}) f_{(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{D}})}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{d}}) dx d\tilde{\mathbf{d}} \quad \text{avec } \tilde{\mathbf{D}} \sim f_{\tilde{\mathbf{D}}} = (f_{\mathbf{X}})^{N_{\mathbf{D}}}$$

$$\mathbb{E}_{f_{(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{D}})}}(\varphi(\mathbf{X})) \approx \int_{\mathbb{X}^{N_{\mathbf{D}}}} \int_{\mathbb{X}} \varphi(\mathbf{x}) \hat{f}_{\mathbf{X}|\tilde{\mathbf{D}}}(\mathbf{x}|\tilde{\mathbf{d}}) f_{\tilde{\mathbf{D}}}(\tilde{\mathbf{d}}) dx d\tilde{\mathbf{d}}$$



# I. Contexte

[2] CHABRIDON, Vincent. *Analyse de sensibilité fiabiliste avec prise en compte d'incertitudes sur le modèle probabiliste-Application aux systèmes aérospatiaux*. 2018. Thèse de doctorat. Université Clermont Auvergne(2017-2020).

## ① Comment quantifier la variance de cet estimateur M.C. ?

Considérons l'espérance suivante prenant en compte la variabilité de la base de données :

$$\mathbb{E}_{f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{D}})}(\varphi(\mathbf{X})) = \int_{\mathbb{X}^{N_{\mathbf{D}}}} \int_{\mathbb{X}} \varphi(\mathbf{x}) f_{(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{D}})}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{d}}) dx d\tilde{\mathbf{d}} \quad \text{avec } \tilde{\mathbf{D}} \sim f_{\tilde{\mathbf{D}}} = (f_{\mathbf{x}})^{N_{\mathbf{D}}}$$

$$\mathbb{E}_{f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{D}})}(\varphi(\mathbf{X})) \approx \int_{\mathbb{X}^{N_{\mathbf{D}}}} \int_{\mathbb{X}} \varphi(\mathbf{x}) \hat{f}_{\mathbf{x}|\tilde{\mathbf{D}}}(\mathbf{x}|\tilde{\mathbf{d}}) f_{\tilde{\mathbf{D}}}(\tilde{\mathbf{d}}) dx d\tilde{\mathbf{d}}$$

En considérant que l'on dispose de  $N$  bases de données  $\tilde{\mathbf{D}}$ , un estimateur de M.C. de cette intégrale est le suivant [2]:

$$\hat{\mathbb{E}}_{\hat{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{D}})}(\varphi(\mathbf{X})) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{N_{\mathbf{X}}} \sum_{j=1}^{N_{\mathbf{X}}} \varphi(\mathbf{X}_k^{(j)}) \quad \text{avec } \mathbf{X}_k^{(j)} \sim \hat{f}_{\mathbf{x}|\tilde{\mathbf{D}}_k}$$

# I. Contexte

[2] CHABRIDON, Vincent. *Analyse de sensibilité fiabiliste avec prise en compte d'incertitudes sur le modèle probabiliste-Application aux systèmes aéronautiques*. 2018. Thèse de doctorat. Université Clermont Auvergne(2017-2020).

## ① Comment quantifier la variance de cet estimateur M.C. ?

Considérons l'espérance suivante prenant en compte la variabilité de la base de données :

$$\mathbb{E}_{f_{(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{D}})}}(\varphi(\mathbf{X})) = \int_{\mathbb{X}^{N_{\mathbf{D}}}} \int_{\mathbb{X}} \varphi(\mathbf{x}) f_{(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{D}})}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{d}}) dx d\tilde{\mathbf{d}} \quad \text{avec } \tilde{\mathbf{D}} \sim f_{\tilde{\mathbf{D}}} = (f_{\mathbf{X}})^{N_{\mathbf{D}}}$$

$$\mathbb{E}_{f_{(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{D}})}}(\varphi(\mathbf{X})) \approx \int_{\mathbb{X}^{N_{\mathbf{D}}}} \int_{\mathbb{X}} \varphi(\mathbf{x}) \hat{f}_{\mathbf{X}|\tilde{\mathbf{D}}}(\mathbf{x}|\tilde{\mathbf{d}}) f_{\tilde{\mathbf{D}}}(\tilde{\mathbf{d}}) dx d\tilde{\mathbf{d}}$$

En considérant que l'on dispose de  $N$  bases de données  $\tilde{\mathbf{D}}$ , un estimateur de M.C. de cette intégrale est le suivant [2]:

$$\hat{\mathbb{E}}_{\hat{f}_{(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{D}})}}(\varphi(\mathbf{X})) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{N_{\mathbf{X}}} \sum_{j=1}^{N_{\mathbf{X}}} \varphi(\mathbf{X}_k^{(j)}) \quad \text{avec } \mathbf{X}_k^{(j)} \sim \hat{f}_{\mathbf{X}|\tilde{\mathbf{D}}_k}$$

Une estimation de  $Var \left[ \hat{\mathbb{E}}_{\hat{f}_{(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{D}})}}(\varphi(\mathbf{X})) \right]$  est alors possible.

# I. Contexte

---

② Où investir l'effort d'enrichissement pour réduire la variance de cet estimateur M.C. ?

# I. Contexte

## ② Où investir l'effort d'enrichissement pour réduire la variance de cet estimateur M.C. ?

De manière générale, la variance de l'estimateur peut être réduite par un investissement d'ajout de données.

INVESTISSEMENT

# I. Contexte

## ② Où investir l'effort d'enrichissement pour réduire la variance de cet estimateur M.C. ?

De manière générale, la variance de l'estimateur peut être réduite par un investissement d'ajout de données.

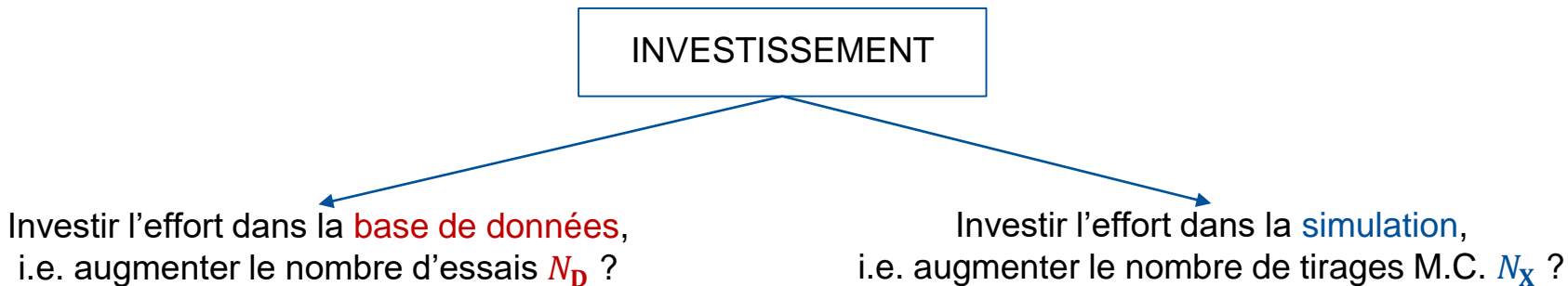
INVESTISSEMENT

Investir l'effort dans la **base de données**,  
i.e. augmenter le nombre d'essais  $N_D$  ?

# I. Contexte

## ② Où investir l'effort d'enrichissement pour réduire la variance de cet estimateur M.C. ?

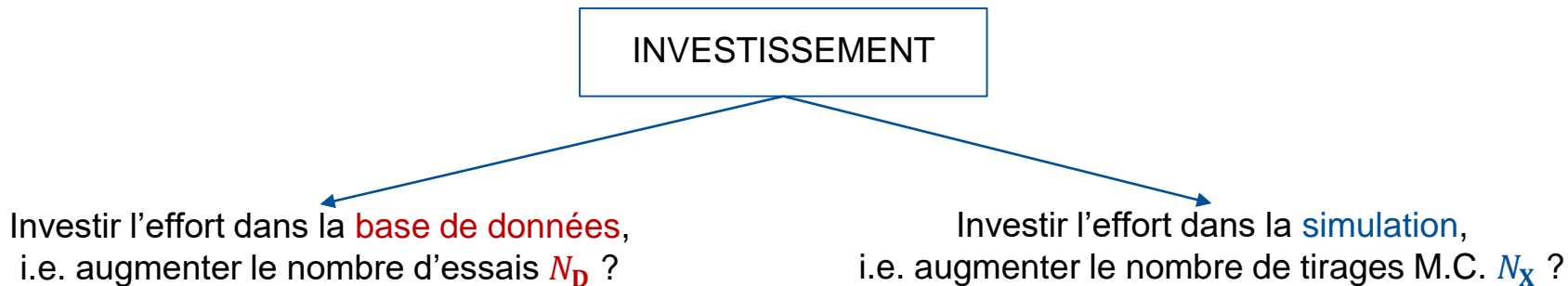
De manière générale, la variance de l'estimateur peut être réduite par un investissement d'ajout de données.



# I. Contexte

## ② Où investir l'effort d'enrichissement pour réduire la variance de cet estimateur M.C. ?

De manière générale, la variance de l'estimateur peut être réduite par un investissement d'ajout de données.

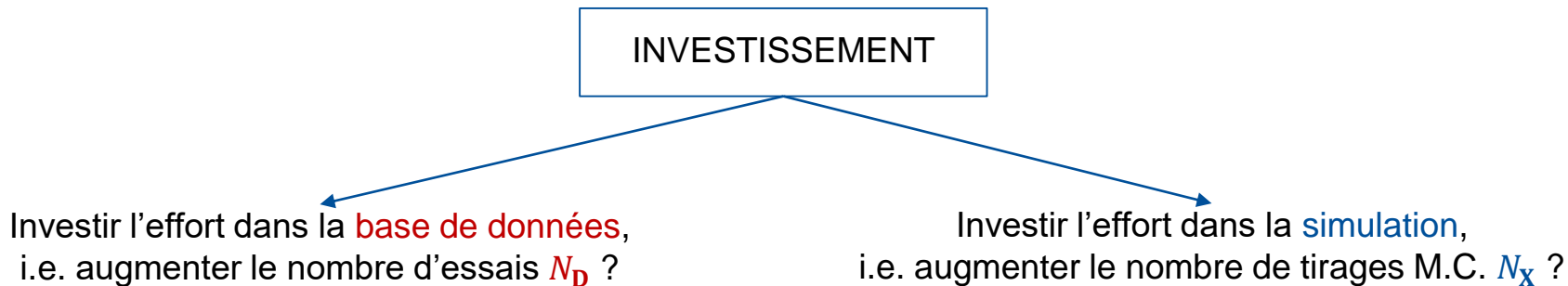


Compromis **essai-simulation**

# I. Contexte

## ② Où investir l'effort d'enrichissement pour réduire la variance de cet estimateur M.C. ?

De manière générale, la variance de l'estimateur peut être réduite par un investissement d'ajout de données.



Compromis **essai-simulation**

Ce compromis peut être déterminé par une **analyse de sensibilité**.

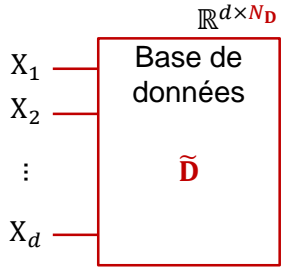


# Plan

---

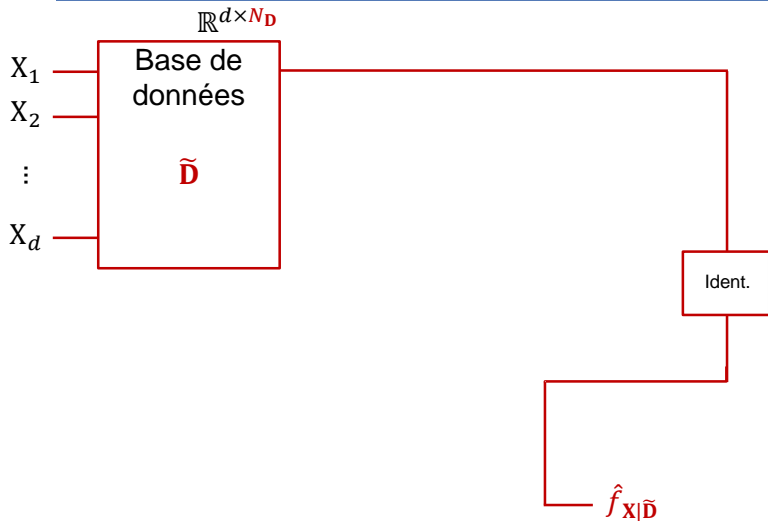
- I. Contexte
- II. Estimateurs
- III. Analyse de sensibilité
- IV. Application sur cas simple
- V. Synthèse et perspectives

## II. Estimateurs



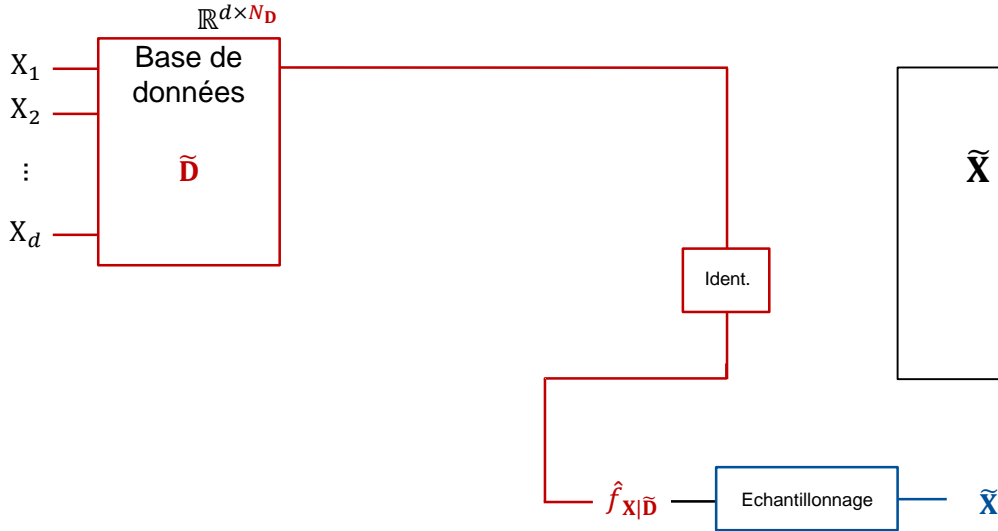
$$\mathbf{D} = (X_1, \dots, X_d)^T \text{ à valeurs dans } \mathbb{R}^d$$
$$\tilde{\mathbf{D}} := (\mathbf{D}^{(1)}, \dots, \mathbf{D}^{(i)}, \dots, \mathbf{D}^{(N_D)}) \text{ à valeurs dans } \mathbb{R}^{d \times N_D}$$

## II. Estimateurs



$$\tilde{\mathbf{D}} := (\mathbf{D}^{(1)}, \dots, \mathbf{D}^{(i)}, \dots, \mathbf{D}^{(N_D)}) \text{ avec } i = 1, \dots, N_D$$
$$\mathbf{D}^{(i)} \sim f_{\mathbf{X}}, \text{ on identifie } \hat{f}_{\mathbf{X}|\tilde{\mathbf{D}}}$$

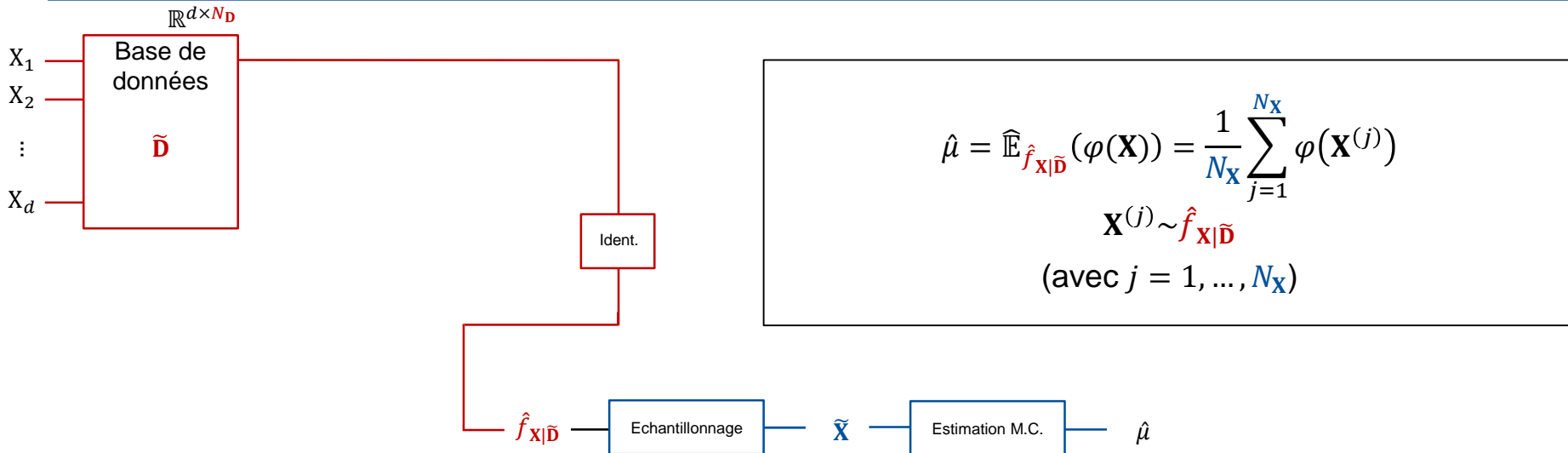
# II. Estimateurs



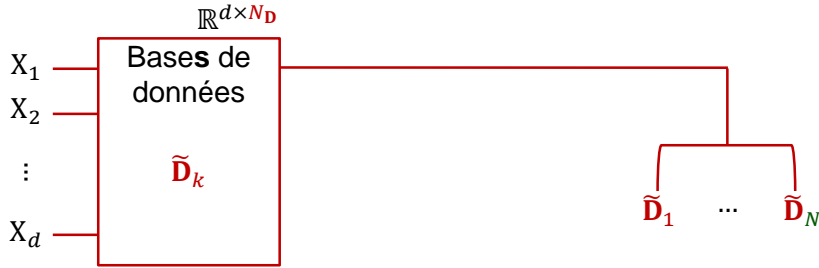
$$\tilde{\mathbf{X}} := (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(j)}, \dots, \mathbf{X}^{(N_X)}) \text{ à valeurs dans } \mathbb{R}^{d \times N_X}$$
$$\mathbf{X}^{(j)} \sim \hat{f}_{\mathbf{X}|\tilde{D}}$$

(avec  $j = 1, \dots, N_X$ )

# II. Estimateurs

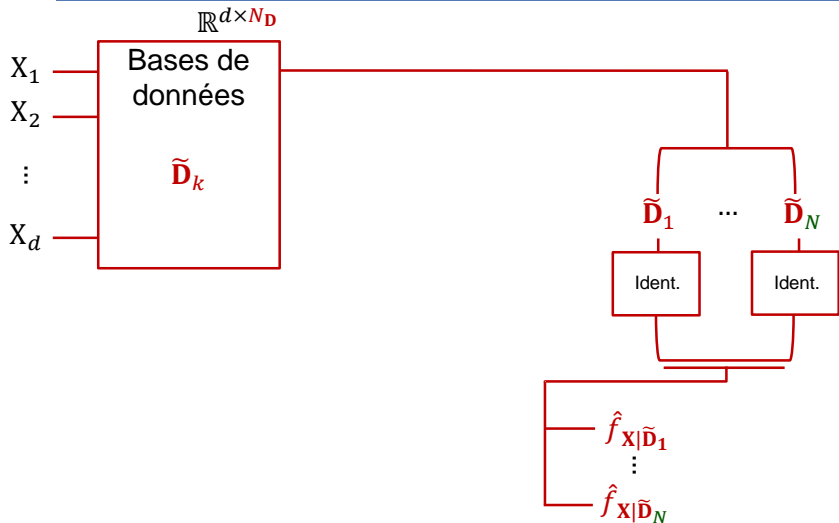


## II. Estimateurs



Considérons que nous disposons de  $N$  bases de données pour prendre en compte la variabilité d'apprentissage.  
(avec  $k = 1, \dots, N$ )

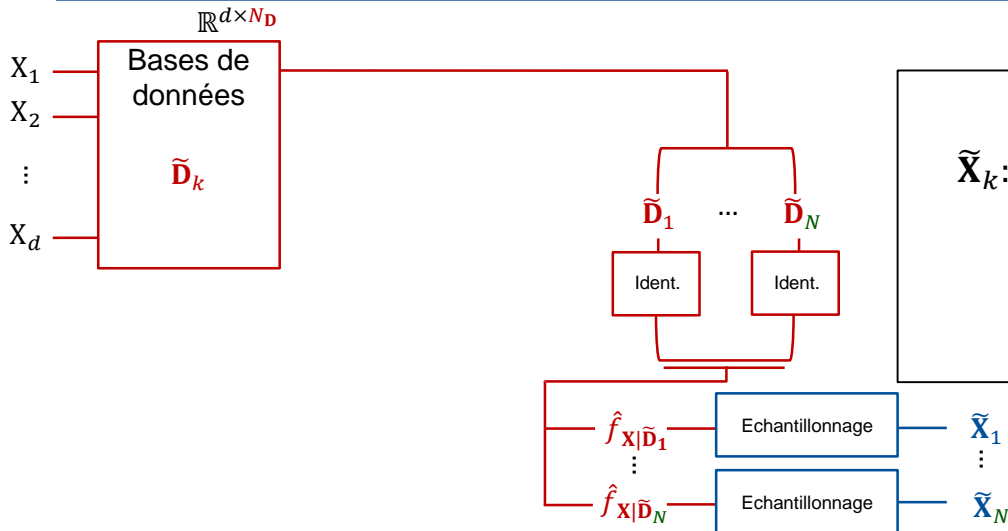
# II. Estimateurs



$\tilde{\mathbf{D}}_k := (\mathbf{D}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{D}_k^{(i)}, \dots, \mathbf{D}_k^{(N_D)})$  avec  $i$  allant de 1 à  $N_D$

$\mathbf{D}_k^{(i)} \sim f_{\mathbf{X}}$ , on identifie  $\hat{f}_{\mathbf{X}|\tilde{\mathbf{D}}_k}$   
(avec  $k = 1, \dots, N$ )

# II. Estimateurs



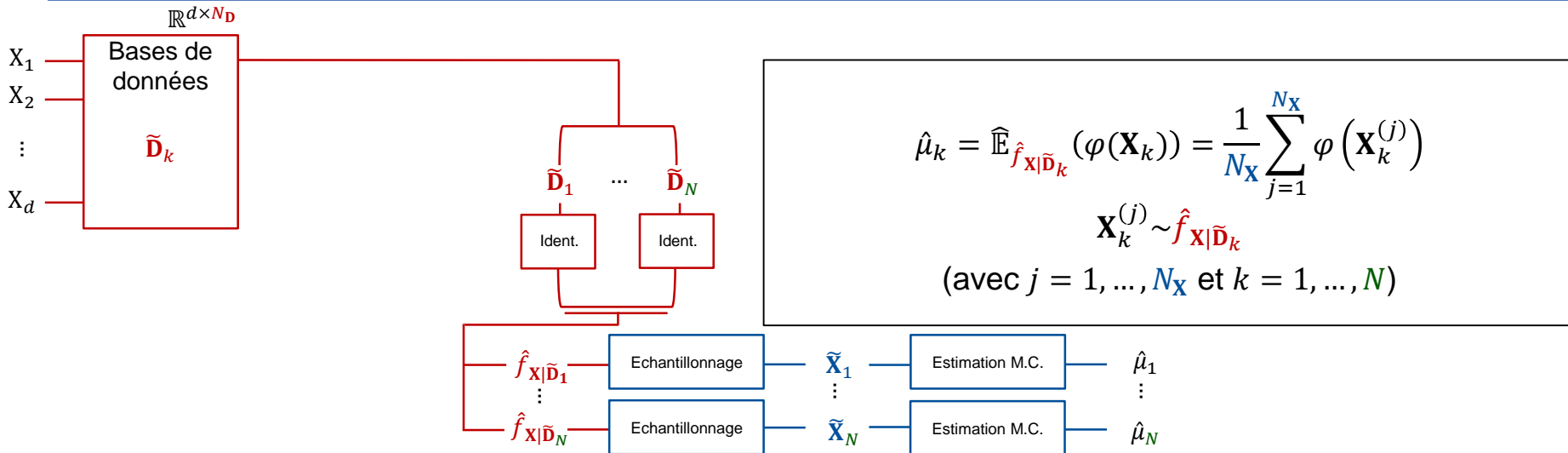
$$\tilde{\mathbf{X}}_k := (\mathbf{x}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_k^{(j)}, \dots, \mathbf{x}_k^{(N_X)}) \text{ à valeurs dans } \mathbb{R}^{d \times N_X}$$

$$\mathbf{x}_k^{(j)} \sim \hat{f}_{\mathbf{x}|\tilde{D}_k}$$

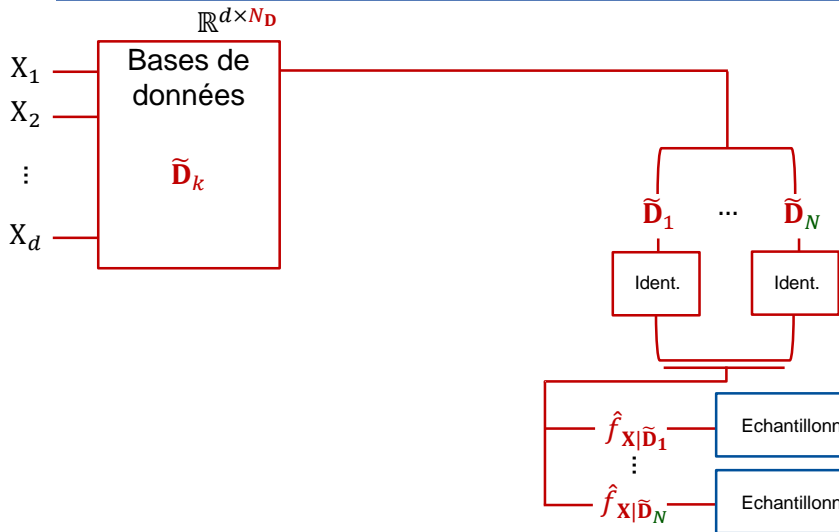
(avec  $j = 1, \dots, N_X$  et  $k = 1, \dots, N$ )



# II. Estimateurs



# II. Estimateurs



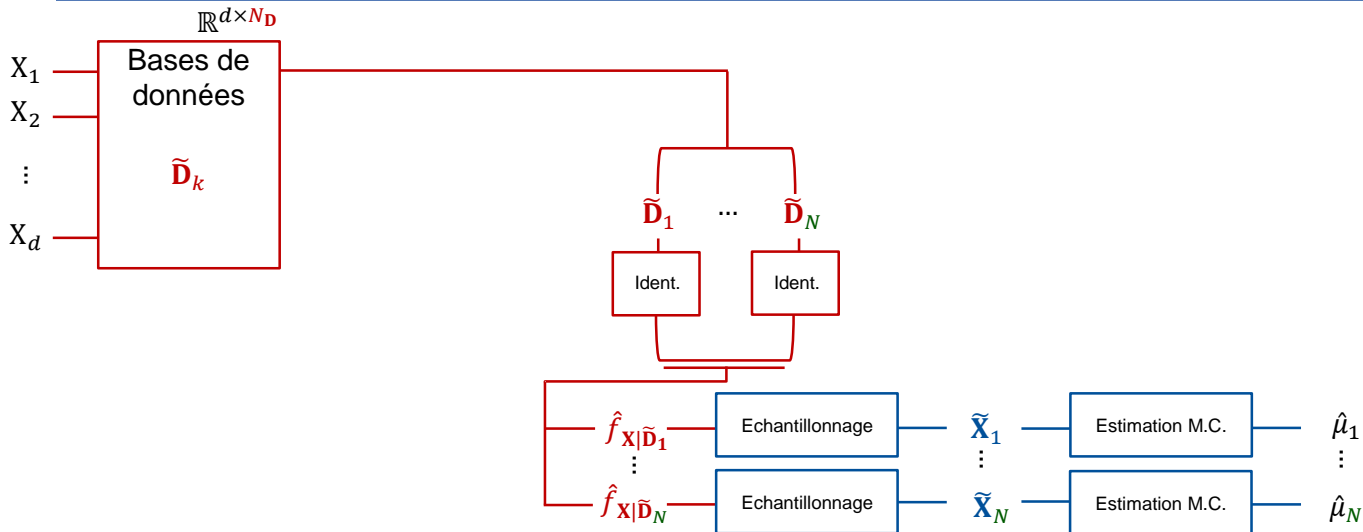
$$\hat{\mu}_k = \hat{\mathbb{E}}_{\hat{f}_{\mathbf{X}|\tilde{\mathbf{D}}_k}}(\varphi(\mathbf{X}_k)) = \frac{1}{N_{\mathbf{X}}} \sum_{j=1}^{N_{\mathbf{X}}} \varphi(\mathbf{X}_k^{(j)})$$

$$\mathbf{X}_k^{(j)} \sim \hat{f}_{\mathbf{X}|\tilde{\mathbf{D}}_k}$$

(avec  $j = 1, \dots, N_{\mathbf{X}}$  et  $k = 1, \dots, N$ )

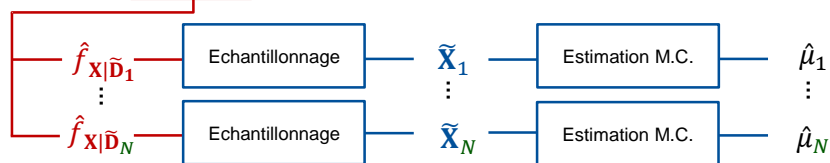
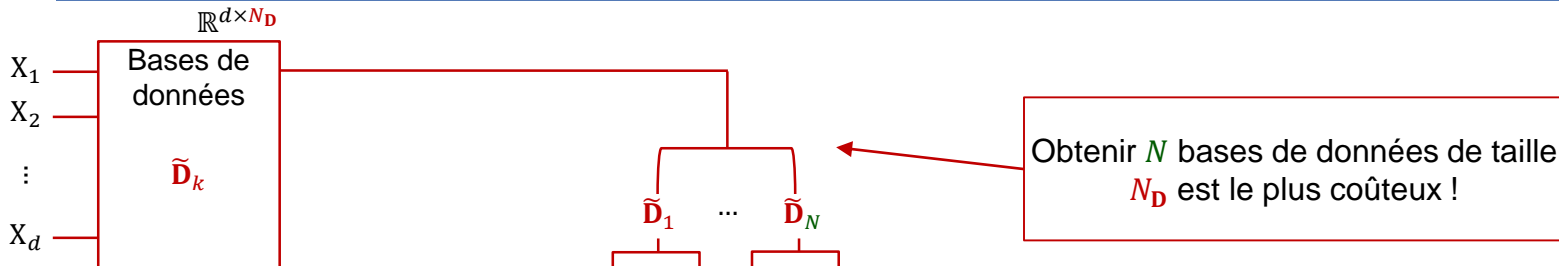
$$\hat{\mathbb{E}}_{f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{D}})}(\varphi(\mathbf{X})) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{N_{\mathbf{X}}} \sum_{j=1}^{N_{\mathbf{X}}} \varphi(\mathbf{X}_k^{(j)}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_k$$

# II. Estimateurs



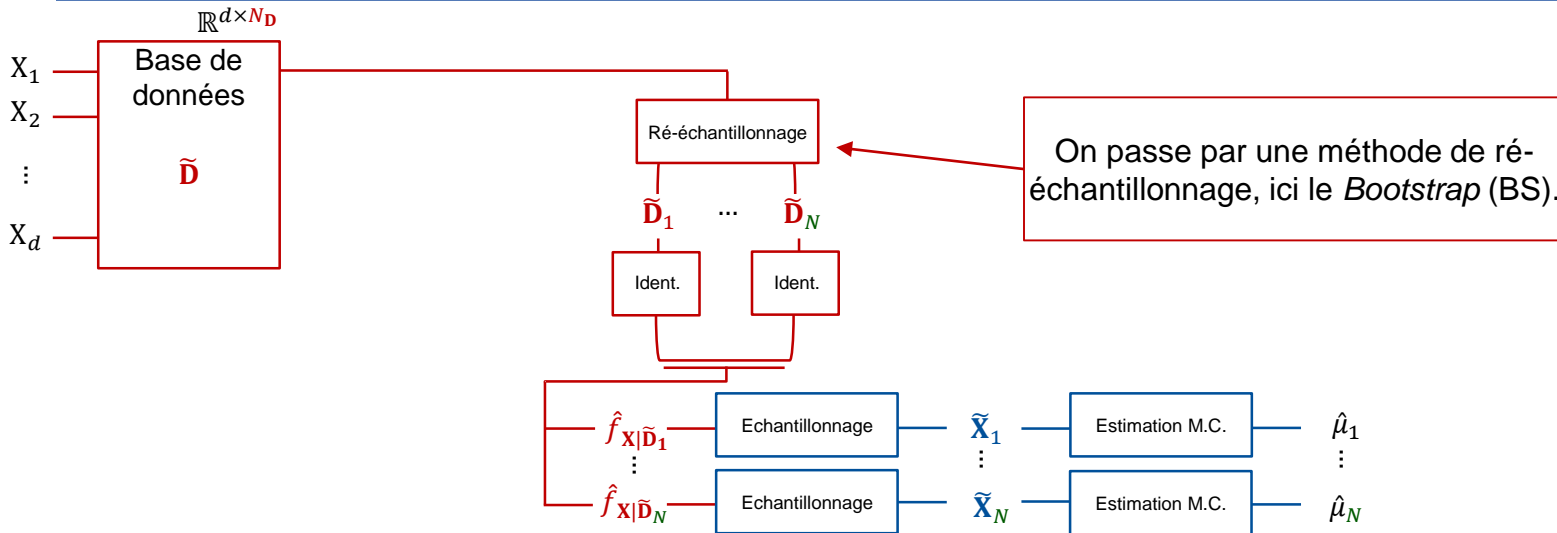
Supposons le coût d'appel à la boîte noire  $\varphi$  **négligeable**...

# II. Estimateurs

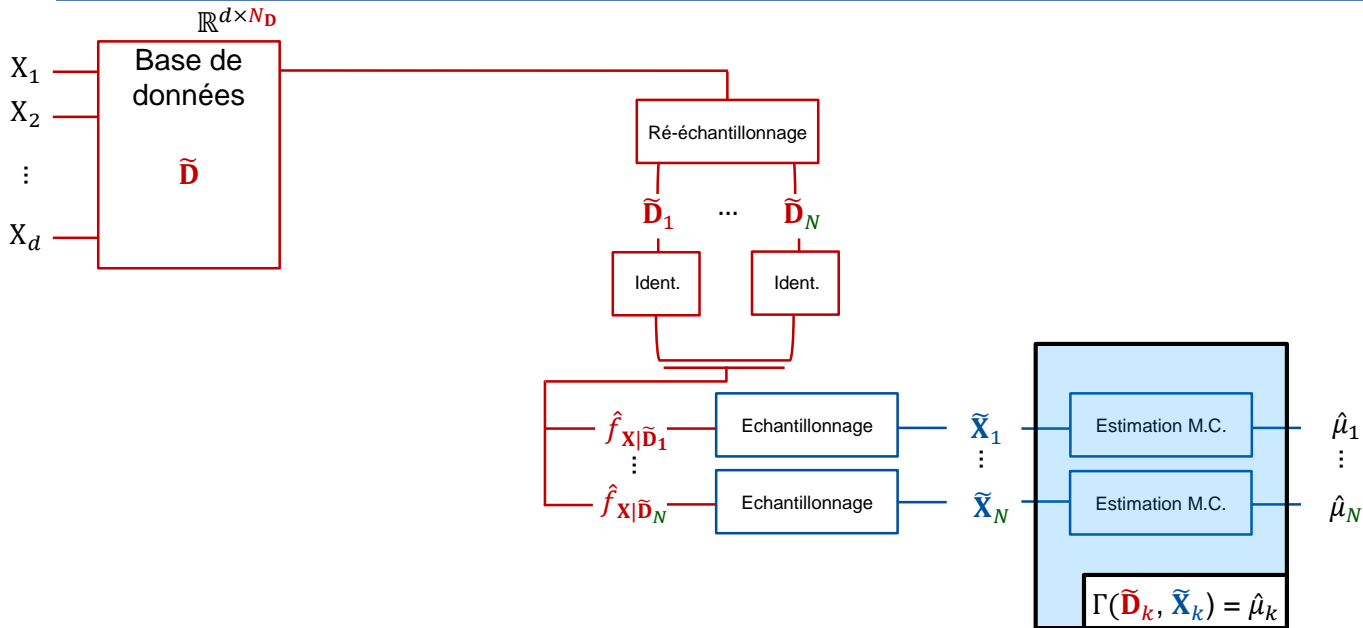


Supposons le coût d'appel à la boîte noire  $\varphi$  **négligeable**...

# II. Estimateurs



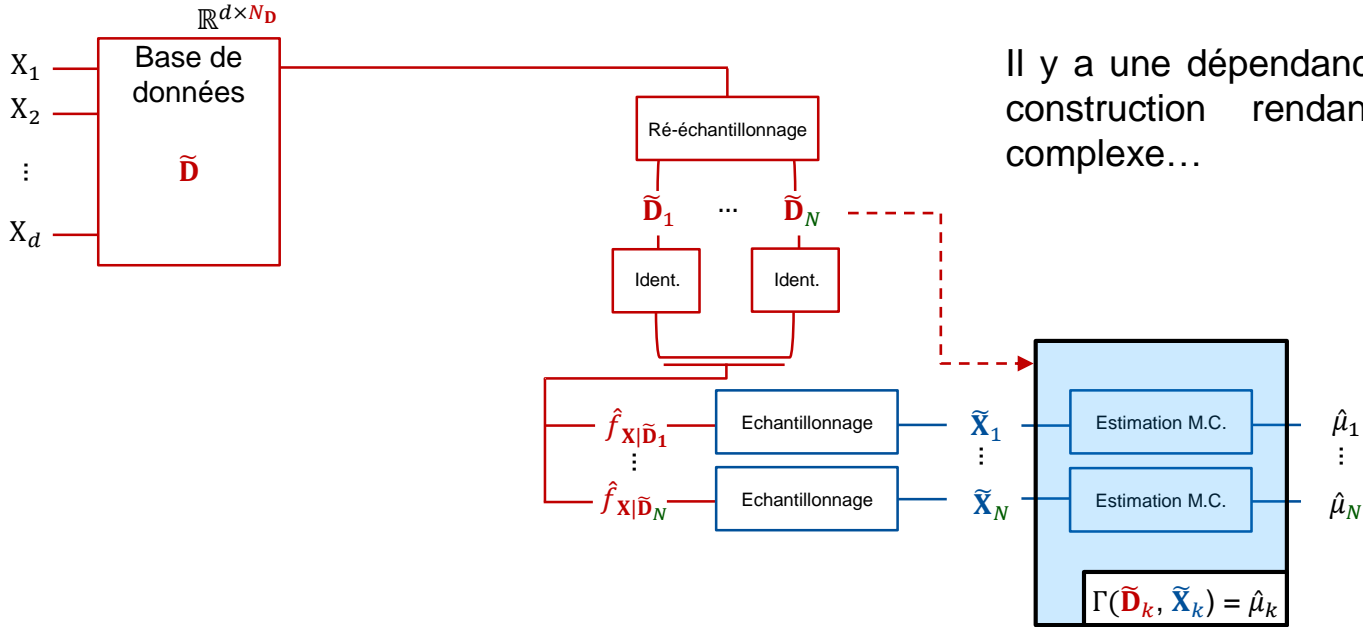
# II. Estimateurs



On s'intéresse à une fonction  $\Gamma$  prenant en entrée  $\tilde{D}$  et  $\tilde{X}$  :

$$\Gamma(\tilde{D}_k, \tilde{X}_k) = \hat{\mu}_k$$

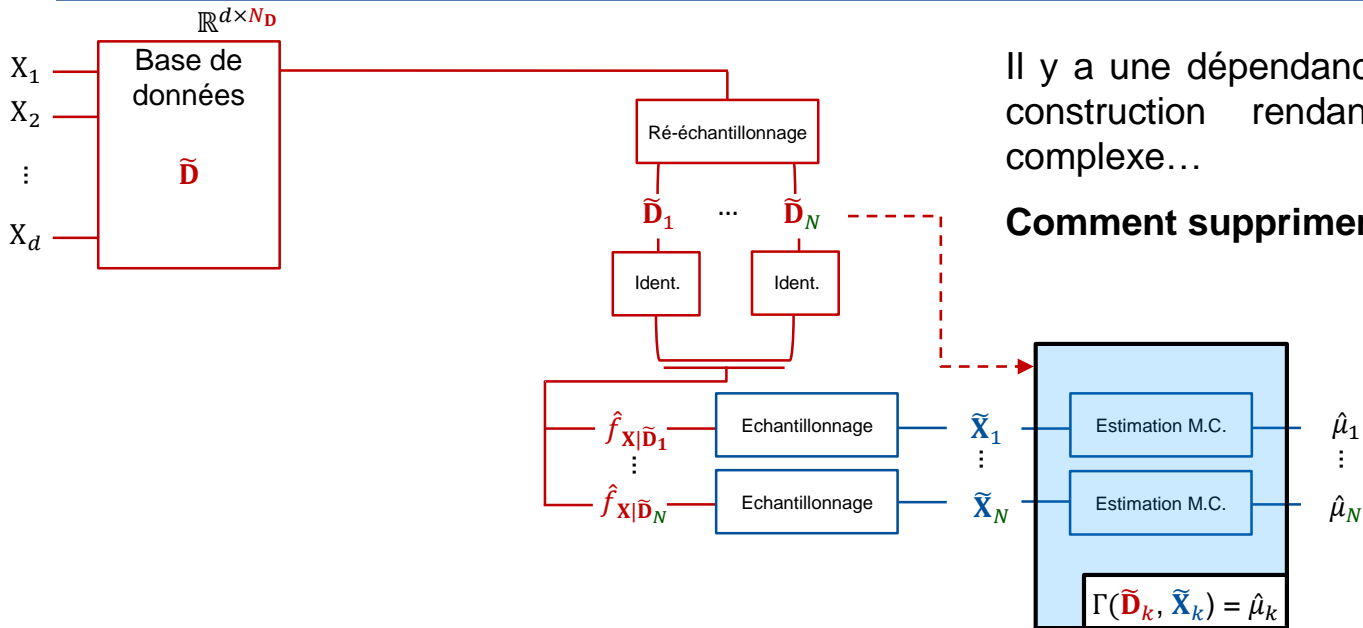
# II. Estimateurs



On s'intéresse à une fonction  $\Gamma$  prenant en entrée  $\tilde{\mathbf{D}}$  et  $\tilde{\mathbf{X}}$  :

$$\Gamma(\tilde{\mathbf{D}}_k, \tilde{\mathbf{X}}_k) = \hat{\mu}_k$$

# II. Estimateurs



Il y a une dépendance des  $\tilde{\mathbf{X}}_k$  aux  $\tilde{\mathbf{D}}_k$  de par leur construction rendant l'analyse de sensibilité complexe...

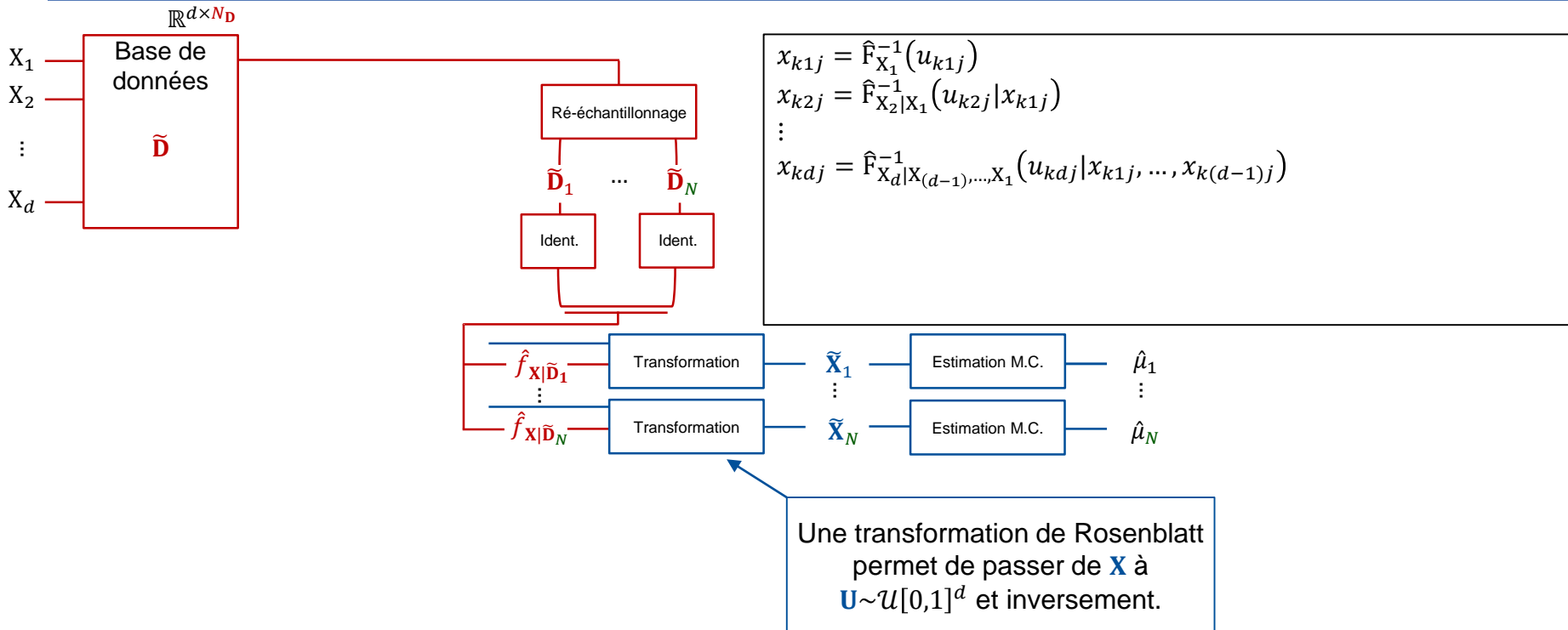
**Comment supprimer cette dépendance ?**

On s'intéresse à une fonction  $\Gamma$  prenant en entrée  $\tilde{\mathbf{D}}$  et  $\tilde{\mathbf{X}}$  :

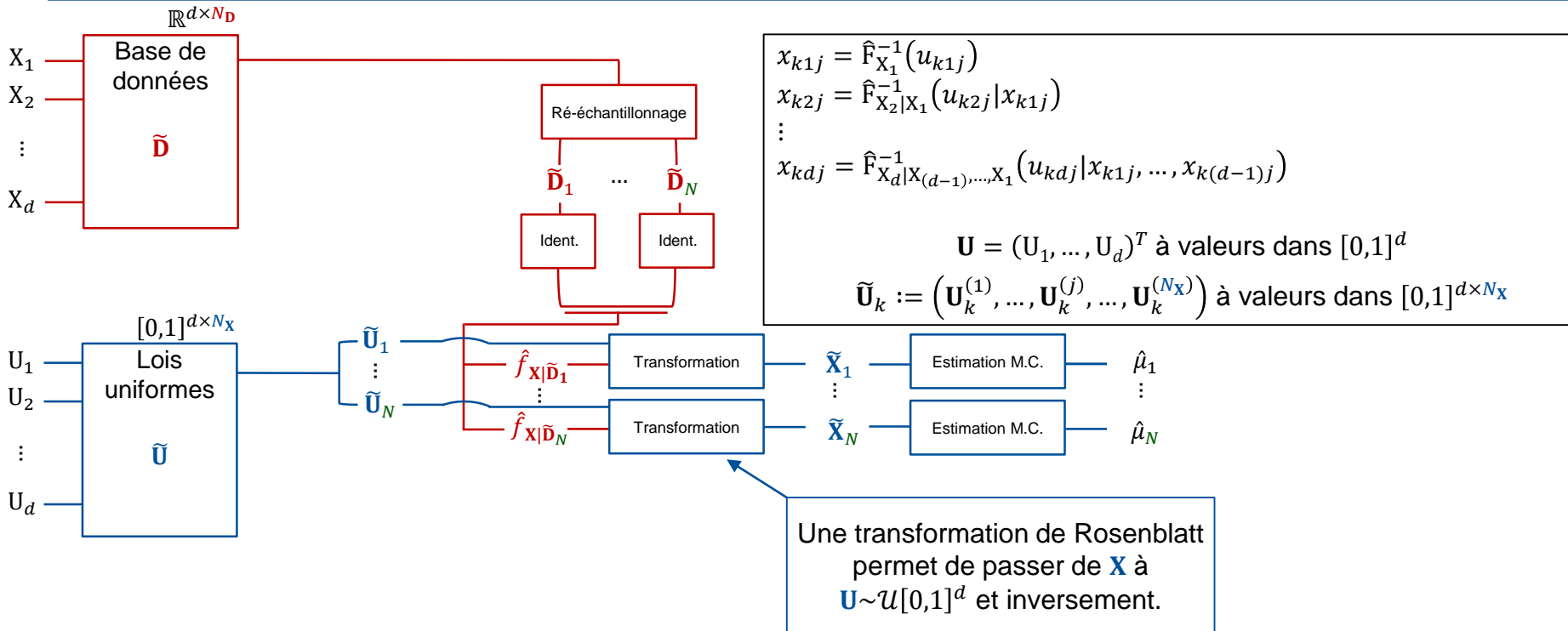
$$\Gamma(\tilde{\mathbf{D}}_k, \tilde{\mathbf{X}}_k) = \hat{\mu}_k$$



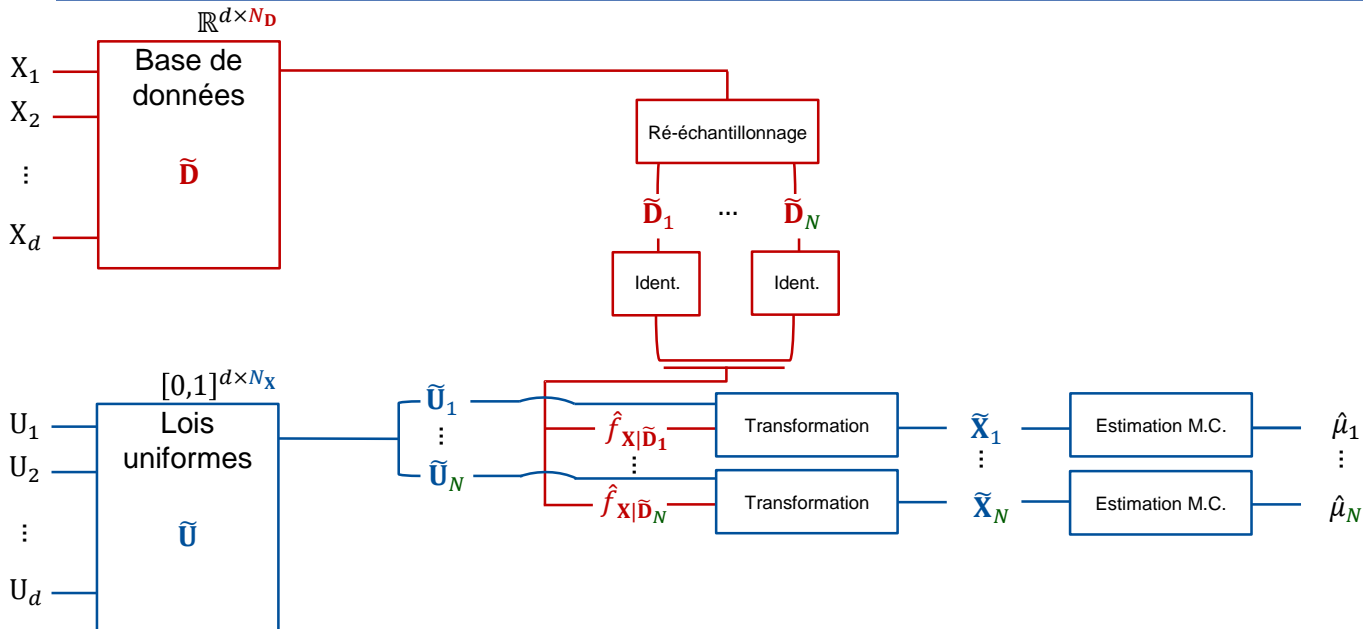
# II. Estimateurs



# II. Estimateurs



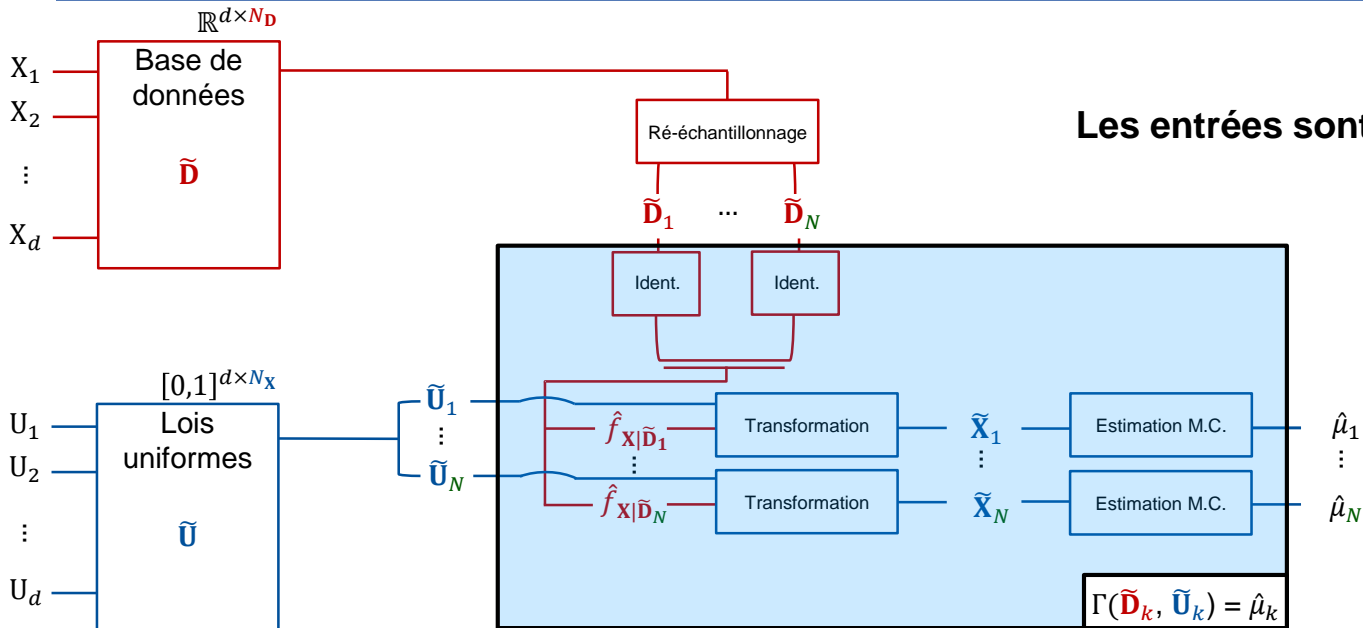
# II. Estimateurs



Cette fois, on s'intéresse à une fonction  $\Gamma$  prenant en entrée  $\tilde{D}$  et  $\tilde{U}$  :

$$\Gamma(\tilde{D}_k, \tilde{U}_k) = \hat{\mu}_k$$

# II. Estimateurs



Cette fois, on s'intéresse à une fonction  $\Gamma$  prenant en entrée  $\tilde{\mathbf{D}}$  et  $\tilde{\mathbf{U}}$  :

$$\Gamma(\tilde{\mathbf{D}}_k, \tilde{\mathbf{U}}_k) = \hat{\mu}_k$$

# Plan

---

- I. Contexte
- II. Estimateurs
- III. Analyse de sensibilité
- IV. Application sur cas simple
- V. Synthèse et perspectives

# III. Analyse de sensibilité

[3] SOBOL', Ilya M. *Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates*. Mathematics and computers in simulation, 2001, vol. 55, no 1-3, p. 271-280.

[4] GAMBOA, Fabrice, JANON, Alexandre, KLEIN, Thierry, et al. *Statistical inference for Sobol pick-freeze Monte Carlo method*. Statistics, 2016, vol. 50, no 4, p. 881-902.

Une analyse de sensibilité sur  $\Gamma(\tilde{\mathbf{D}}_k, \tilde{\mathbf{U}}_k) = \hat{\mu}_k$  par rapport à ses entrées est réalisée. Des indices de Sobol' [3] sont utilisés par le biais d'une approche Pick-Freeze (PF) [4] :

$$S_{\tilde{\mathbf{D}}} = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}_{\sim \tilde{\mathbf{D}}}(\hat{\mu}|\tilde{\mathbf{D}})]}{\text{Var}[\hat{\mu}]}$$

$$S_{\tilde{\mathbf{U}}} = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}_{\sim \tilde{\mathbf{U}}}(\hat{\mu}|\tilde{\mathbf{U}})]}{\text{Var}[\hat{\mu}]}$$

# III. Analyse de sensibilité

[3] SOBOL', Ilya M. *Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates*. Mathematics and computers in simulation, 2001, vol. 55, no 1-3, p. 271-280.

[4] GAMBOA, Fabrice, JANON, Alexandre, KLEIN, Thierry, et al. *Statistical inference for Sobol pick-freeze Monte Carlo method*. Statistics, 2016, vol. 50, no 4, p. 881-902.

Une analyse de sensibilité sur  $\Gamma(\tilde{\mathbf{D}}_k, \tilde{\mathbf{U}}_k) = \hat{\mu}_k$  par rapport à ses entrées est réalisée. Des indices de Sobol' [3] sont utilisés par le biais d'une approche Pick-Freeze (PF) [4] :

$$S_{\tilde{\mathbf{D}}} = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}_{\sim \tilde{\mathbf{D}}}(\hat{\mu} | \tilde{\mathbf{D}})]}{\text{Var}[\hat{\mu}]}$$



$$S_{\tilde{\mathbf{D}}} = \frac{\text{Cov}(\hat{\mu}, \hat{\mu}^{\tilde{\mathbf{D}}})}{\text{Var}[\hat{\mu}]}$$

$$S_{\tilde{\mathbf{U}}} = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}_{\sim \tilde{\mathbf{U}}}(\hat{\mu} | \tilde{\mathbf{U}})]}{\text{Var}[\hat{\mu}]}$$

$$S_{\tilde{\mathbf{U}}} = \frac{\text{Cov}(\hat{\mu}, \hat{\mu}^{\tilde{\mathbf{U}}})}{\text{Var}[\hat{\mu}]}$$

# III. Analyse de sensibilité

[3] SOBOL', Ilya M. *Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates*. Mathematics and computers in simulation, 2001, vol. 55, no 1-3, p. 271-280.

[4] GAMBOA, Fabrice, JANON, Alexandre, KLEIN, Thierry, et al. *Statistical inference for Sobol pick-freeze Monte Carlo method*. Statistics, 2016, vol. 50, no 4, p. 881-902.

Une analyse de sensibilité sur  $\Gamma(\tilde{\mathbf{D}}_k, \tilde{\mathbf{U}}_k) = \hat{\mu}_k$  par rapport à ses entrées est réalisée. Des indices de Sobol' [3] sont utilisés par le biais d'une approche Pick-Freeze (PF) [4] :

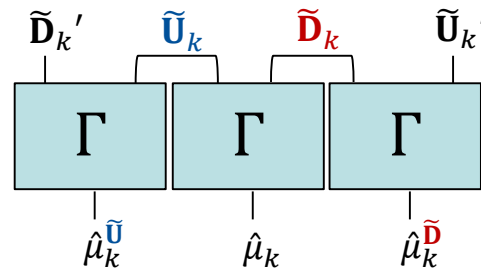
$$S_{\tilde{\mathbf{D}}} = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}_{\sim \tilde{\mathbf{D}}}(\hat{\mu} | \tilde{\mathbf{D}})]}{\text{Var}[\hat{\mu}]}$$



$$S_{\tilde{\mathbf{D}}} = \frac{\text{Cov}(\hat{\mu}, \hat{\mu}^{\tilde{\mathbf{D}}})}{\text{Var}[\hat{\mu}]}$$

$$S_{\tilde{\mathbf{U}}} = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}_{\sim \tilde{\mathbf{U}}}(\hat{\mu} | \tilde{\mathbf{U}})]}{\text{Var}[\hat{\mu}]}$$

$$S_{\tilde{\mathbf{U}}} = \frac{\text{Cov}(\hat{\mu}, \hat{\mu}^{\tilde{\mathbf{U}}})}{\text{Var}[\hat{\mu}]}$$





# III. Analyse de sensibilité

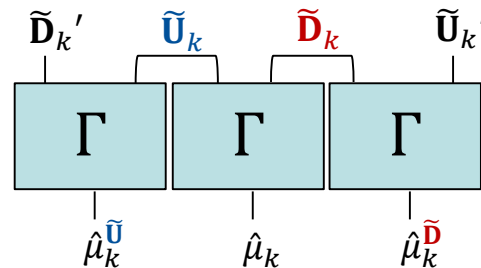
[3] SOBOL', Ilya M. *Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates*. Mathematics and computers in simulation, 2001, vol. 55, no 1-3, p. 271-280.

[4] GAMBOA, Fabrice, JANON, Alexandre, KLEIN, Thierry, et al. *Statistical inference for Sobol pick-freeze Monte Carlo method*. Statistics, 2016, vol. 50, no 4, p. 881-902.

Une analyse de sensibilité sur  $\Gamma(\tilde{\mathbf{D}}_k, \tilde{\mathbf{U}}_k) = \hat{\mu}_k$  par rapport à ses entrées est réalisée. Des indices de Sobol' [3] sont utilisés par le biais d'une approche Pick-Freeze (PF) [4] :

$$S_{\tilde{\mathbf{D}}} = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{D}}}[\hat{\mu}|\tilde{\mathbf{D}}]]}{\text{Var}[\hat{\mu}]} \quad S_{\tilde{\mathbf{D}}} = \frac{\text{Cov}(\hat{\mu}, \hat{\mu}^{\tilde{\mathbf{D}}})}{\text{Var}[\hat{\mu}]}$$

$$S_{\tilde{\mathbf{U}}} = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{U}}}[\hat{\mu}|\tilde{\mathbf{U}}]]}{\text{Var}[\hat{\mu}]} \quad S_{\tilde{\mathbf{U}}} = \frac{\text{Cov}(\hat{\mu}, \hat{\mu}^{\tilde{\mathbf{U}}})}{\text{Var}[\hat{\mu}]}$$



Les estimateurs de ces indices sont les suivants :

$$\hat{S}_{\tilde{\mathbf{D}}} = \frac{\widehat{\text{Cov}}(\hat{\mu}, \hat{\mu}^{\tilde{\mathbf{D}}})}{\widehat{\text{Var}}[\hat{\mu}]} \quad \hat{S}_{\tilde{\mathbf{U}}} = \frac{\widehat{\text{Cov}}(\hat{\mu}, \hat{\mu}^{\tilde{\mathbf{U}}})}{\widehat{\text{Var}}[\hat{\mu}]}$$

$$\widehat{\text{Cov}}(\hat{\mu}, \hat{\mu}^u) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_k \hat{\mu}_k^u - \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_k \right) \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_k^u \right)$$

# III. Analyse de sensibilité

[3] SOBOL', Ilya M. *Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates*. Mathematics and computers in simulation, 2001, vol. 55, no 1-3, p. 271-280.

[4] GAMBOA, Fabrice, JANON, Alexandre, KLEIN, Thierry, et al. *Statistical inference for Sobol pick-freeze Monte Carlo method*. Statistics, 2016, vol. 50, no 4, p. 881-902.

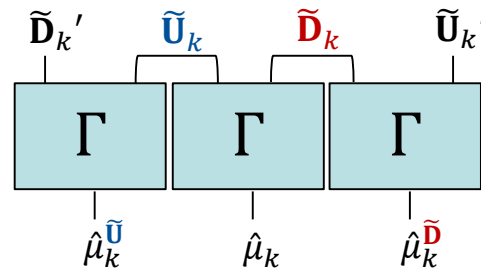
Une analyse de sensibilité sur  $\Gamma(\tilde{\mathbf{D}}_k, \tilde{\mathbf{U}}_k) = \hat{\mu}_k$  par rapport à ses entrées est réalisée. Des indices de Sobol' [3] sont utilisés par le biais d'une approche Pick-Freeze (PF) [4] :

$$S_{\tilde{\mathbf{D}}} = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{D}}}[\hat{\mu}|\tilde{\mathbf{D}}]]}{\text{Var}[\hat{\mu}]}$$

$$S_{\tilde{\mathbf{D}}} = \frac{\text{Cov}(\hat{\mu}, \hat{\mu}^{\tilde{\mathbf{D}}})}{\text{Var}[\hat{\mu}]}$$

$$S_{\tilde{\mathbf{U}}} = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{U}}}[\hat{\mu}|\tilde{\mathbf{U}}]]}{\text{Var}[\hat{\mu}]}$$

$$S_{\tilde{\mathbf{U}}} = \frac{\text{Cov}(\hat{\mu}, \hat{\mu}^{\tilde{\mathbf{U}}})}{\text{Var}[\hat{\mu}]}$$



Les estimateurs de ces indices sont les suivants :

$$\hat{S}_{\tilde{\mathbf{D}}} = \frac{\widehat{\text{Cov}}(\hat{\mu}, \hat{\mu}^{\tilde{\mathbf{D}}})}{\widehat{\text{Var}}[\hat{\mu}]}$$

$$\hat{S}_{\tilde{\mathbf{U}}} = \frac{\widehat{\text{Cov}}(\hat{\mu}, \hat{\mu}^{\tilde{\mathbf{U}}})}{\widehat{\text{Var}}[\hat{\mu}]}$$

$$\widehat{\text{Cov}}(\hat{\mu}, \hat{\mu}^u) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_k \hat{\mu}_k^u - \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_k \right) \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_k^u \right)$$

Nombre d'appels à la boîte noire :

$$N_X \times N \times 3$$

# III. Analyse de sensibilité

Quelles est la particularité de cette analyse de sensibilité ?

# III. Analyse de sensibilité

Quelles est la particularité de cette analyse de sensibilité ?

→ La particularité est l'étude de la sensibilité par rapport à une base de données  $\tilde{D}$ .

# III. Analyse de sensibilité

---

Quelles est la particularité de cette analyse de sensibilité ?

→ La particularité est l'étude de la sensibilité par rapport à une base de données  $\tilde{D}$ .

Quelles sont les attentes de cette analyse ?

# III. Analyse de sensibilité

Quelles est la particularité de cette analyse de sensibilité ?

→ La particularité est l'étude de la sensibilité par rapport à une base de données  $\tilde{D}$ .

Quelles sont les attentes de cette analyse ?

$N_D \nearrow$

# III. Analyse de sensibilité

Quelles est la particularité de cette analyse de sensibilité ?

→ La particularité est l'étude de la sensibilité par rapport à une base de données  $\tilde{\mathbf{D}}$ .

Quelles sont les attentes de cette analyse ?

$$\begin{array}{c} N_{\mathbf{D}} \nearrow \\ \downarrow \\ \text{Var}[\mathbb{E}_{\sim \tilde{\mathbf{D}}}(\hat{\mu}|\tilde{\mathbf{D}})] = \text{Cov}(\hat{\mu}, \hat{\mu}^{\tilde{\mathbf{D}}}) \searrow \end{array}$$

# III. Analyse de sensibilité

Quelles est la particularité de cette analyse de sensibilité ?

→ La particularité est l'étude de la sensibilité par rapport à une base de données  $\tilde{\mathbf{D}}$ .

Quelles sont les attentes de cette analyse ?

$$\begin{array}{c} N_{\mathbf{D}} \nearrow \\ \downarrow \\ \text{Var}[\mathbb{E}_{\sim \tilde{\mathbf{D}}}(\hat{\mu}|\tilde{\mathbf{D}})] = \text{Cov}(\hat{\mu}, \hat{\mu}^{\tilde{\mathbf{D}}}) \searrow \\ \swarrow \quad \searrow \\ S_{\tilde{\mathbf{D}}} \searrow \quad S_{\tilde{\mathbf{U}}} \nearrow \end{array}$$

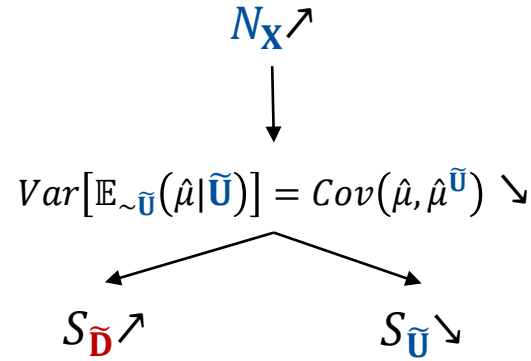
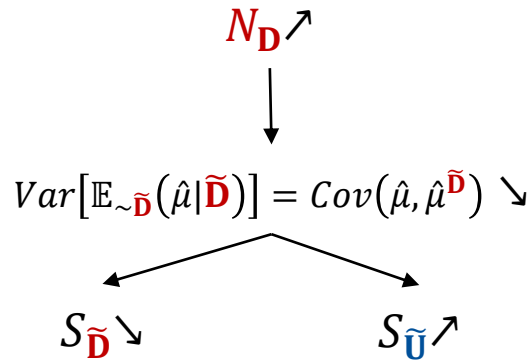


# III. Analyse de sensibilité

Quelles est la particularité de cette analyse de sensibilité ?

→ La particularité est l'étude de la sensibilité par rapport à une base de données  $\tilde{\mathbf{D}}$ .

Quelles sont les attentes de cette analyse ?

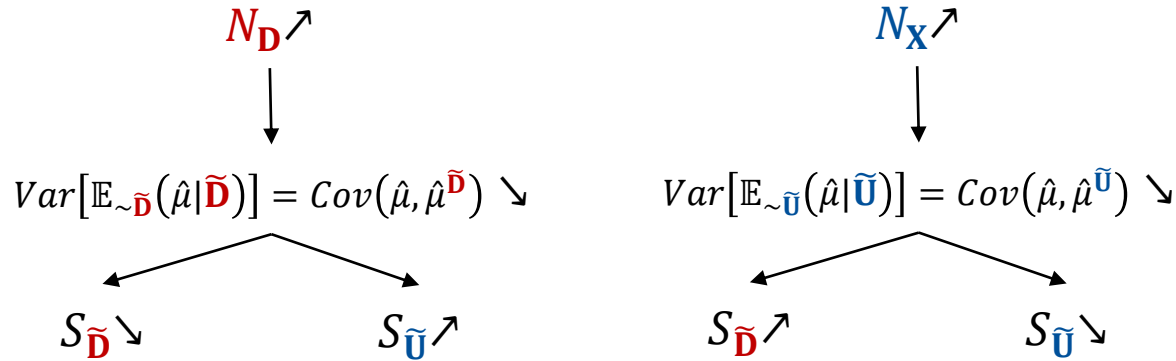


# III. Analyse de sensibilité

Quelles est la particularité de cette analyse de sensibilité ?

→ La particularité est l'étude de la sensibilité par rapport à une base de données  $\tilde{\mathbf{D}}$ .

Quelles sont les attentes de cette analyse ?



Appliquons l'analyse PF à un cas simple en comparant les résultats sans ré-échantillonnage (génération) et avec ré-échantillonnage (BS).

# Plan

---

- I. Contexte
- II. Estimateurs
- III. Analyse de sensibilité
- IV. Application sur cas simple
- V. Synthèse et perspectives

# IV. Application sur cas simple

---

Prenons le cas test où  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  est l'entrée de la boîte noire avec  $\mathbf{X} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$  et la sortie est  $Y$  telle que  $Y = \varphi(\mathbf{X}) = X_1 + X_2$ .

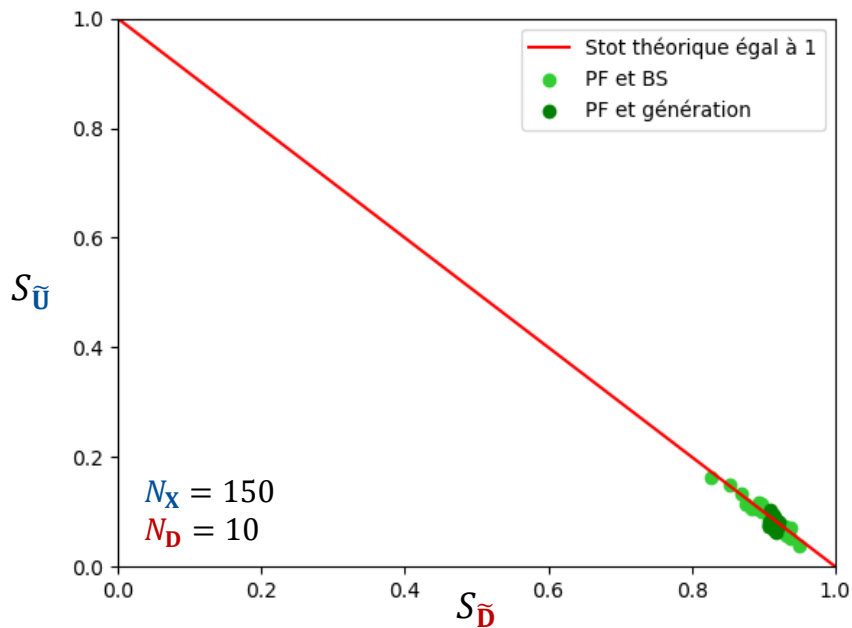
# IV. Application sur cas simple

---

Prenons le cas test où  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  est l'entrée de la boîte noire avec  $\mathbf{X} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$  et la sortie est  $Y$  telle que  $Y = \varphi(\mathbf{X}) = X_1 + X_2$ .  $N$  a été fixé à  $10^4$  et 25 estimations de chaque indice sont réalisées.

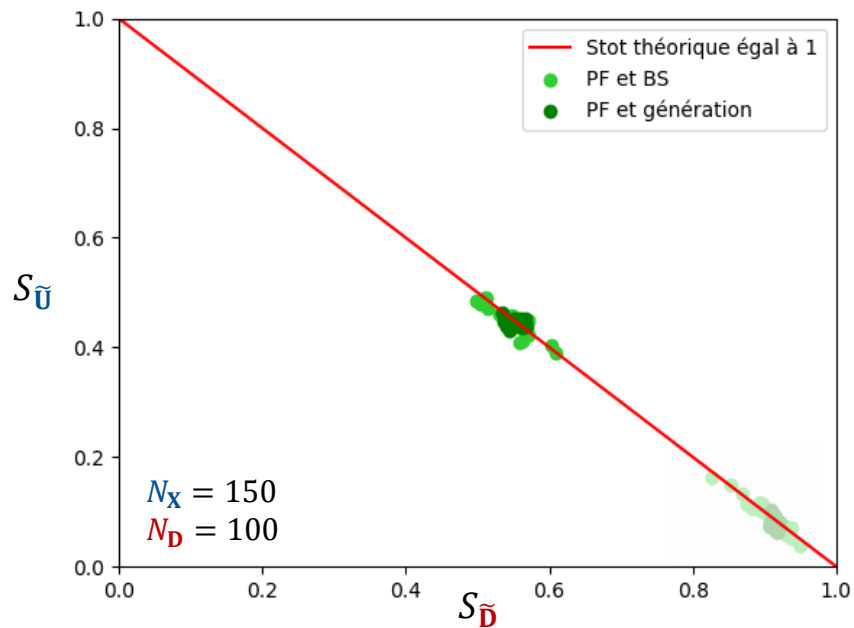
# IV. Application sur cas simple

Prenons le cas test où  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  est l'entrée de la boîte noire avec  $\mathbf{X} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$  et la sortie est  $Y$  telle que  $Y = \varphi(\mathbf{X}) = X_1 + X_2$ .  $N$  a été fixé à  $10^4$  et 25 estimations de chaque indice sont réalisées.



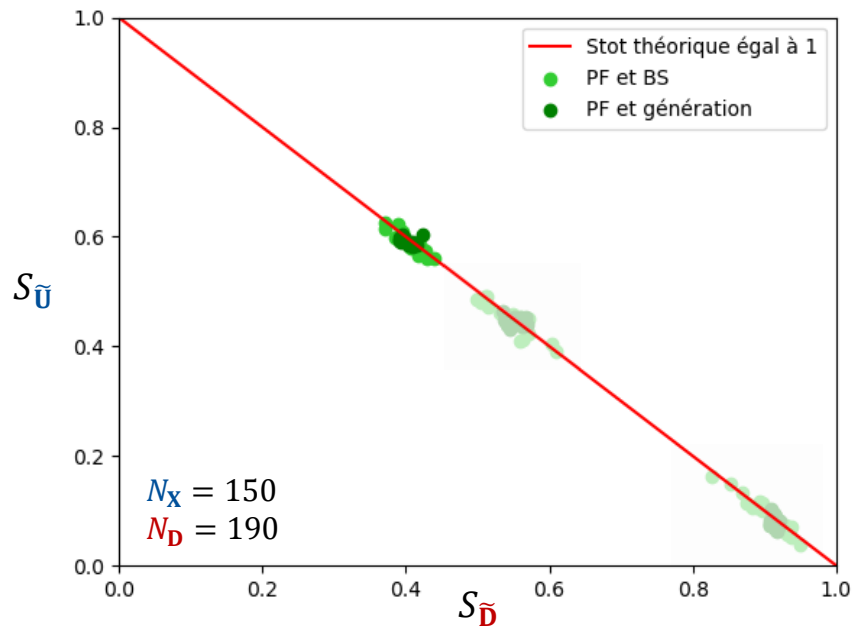
# IV. Application sur cas simple

Prenons le cas test où  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  est l'entrée de la boîte noire avec  $\mathbf{X} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$  et la sortie est  $Y$  telle que  $Y = \varphi(\mathbf{X}) = X_1 + X_2$ .  $N$  a été fixé à  $10^4$  et 25 estimations de chaque indice sont réalisées.



# IV. Application sur cas simple

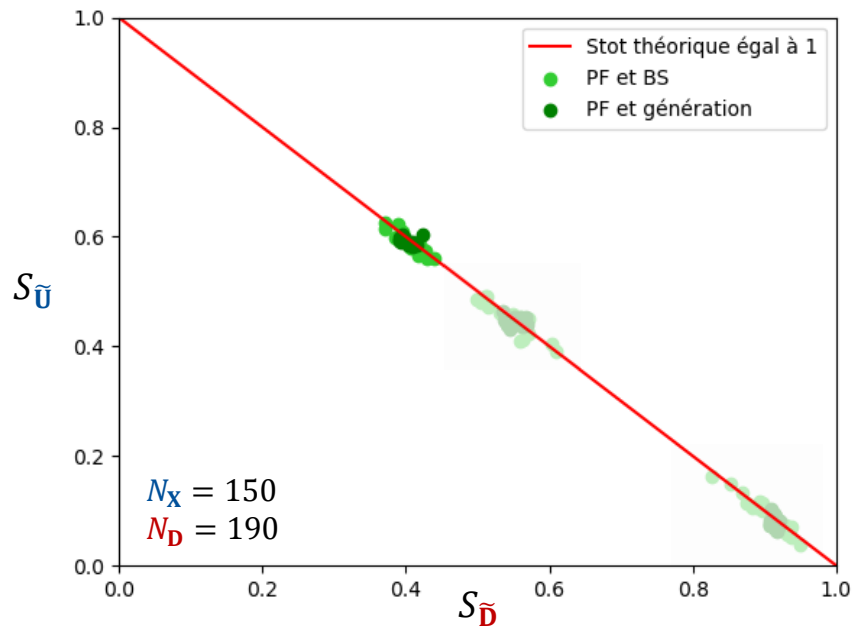
Prenons le cas test où  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  est l'entrée de la boîte noire avec  $\mathbf{X} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$  et la sortie est  $Y$  telle que  $Y = \varphi(\mathbf{X}) = X_1 + X_2$ .  $N$  a été fixé à  $10^4$  et 25 estimations de chaque indice sont réalisées.





# IV. Application sur cas simple

Prenons le cas test où  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  est l'entrée de la boîte noire avec  $\mathbf{X} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$  et la sortie est  $Y$  telle que  $Y = \varphi(\mathbf{X}) = X_1 + X_2$ .  $N$  a été fixé à  $10^4$  et 25 estimations de chaque indice sont réalisées.



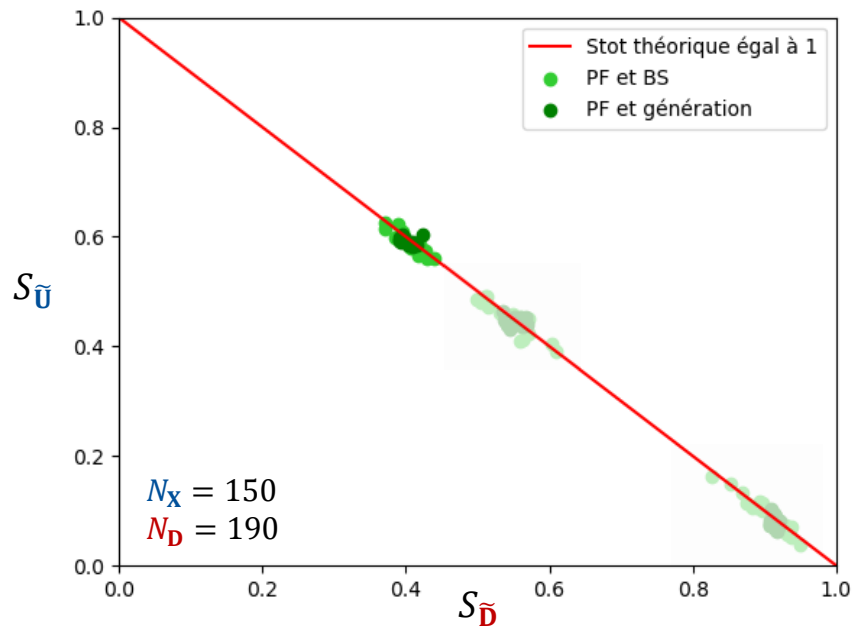
Quand  $N_D$  augmente :

→  $S_{\bar{D}}$  diminue et  $S_{\bar{U}}$  augmente,

→ la dispersion des estimations avec BS diminue.

# IV. Application sur cas simple

Prenons le cas test où  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  est l'entrée de la boîte noire avec  $\mathbf{X} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$  et la sortie est  $Y$  telle que  $Y = \varphi(\mathbf{X}) = X_1 + X_2$ .  $N$  a été fixé à  $10^4$  et 25 estimations de chaque indice sont réalisées.



Quand  $N_D$  augmente :

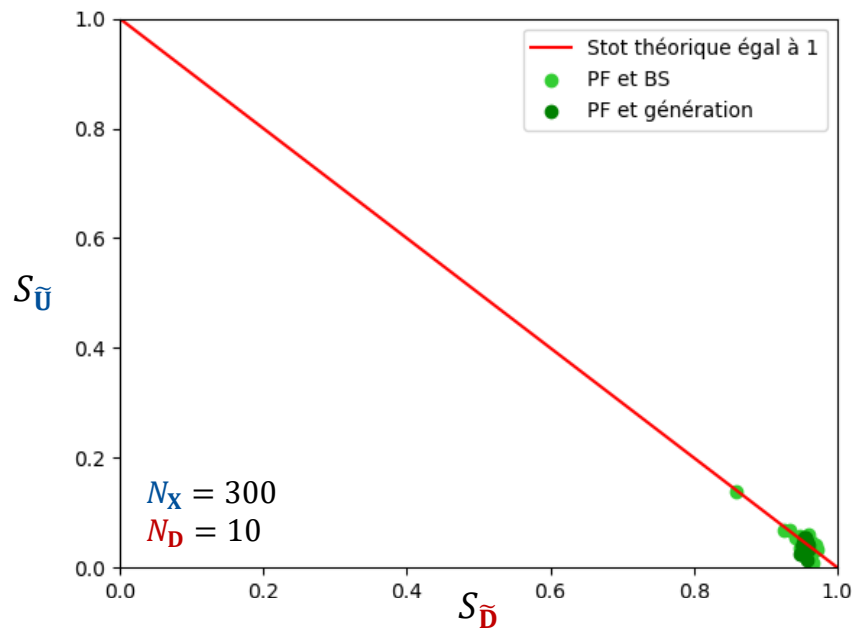
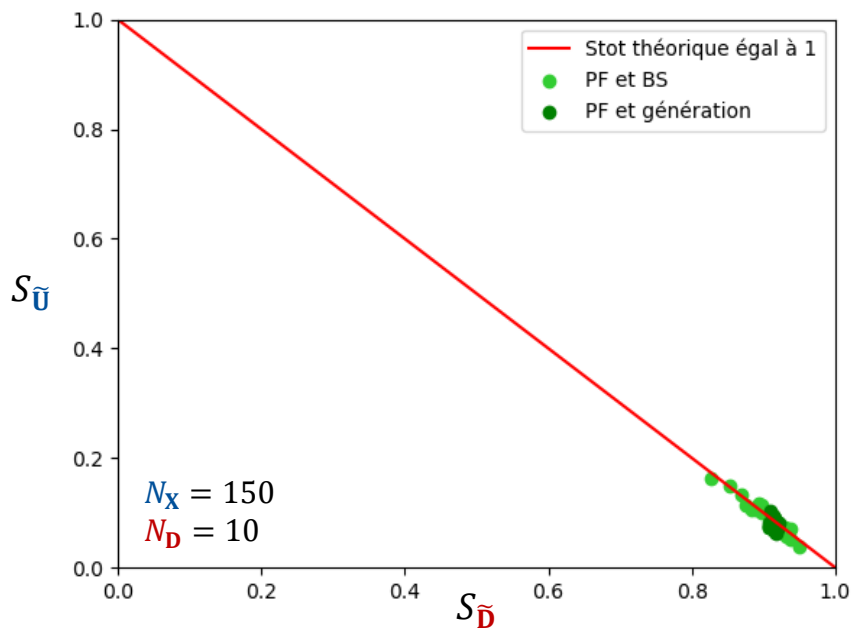
→  $S_{\bar{D}}$  diminue et  $S_{\bar{U}}$  augmente,

→ la dispersion des estimations avec BS diminue.

Qu'en est-il lorsque  $N_X$  augmente ?

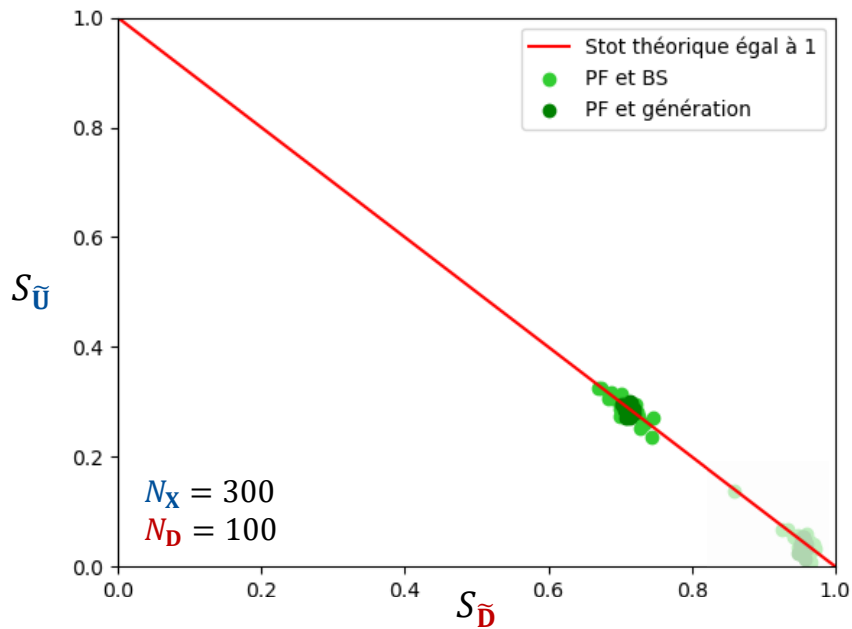
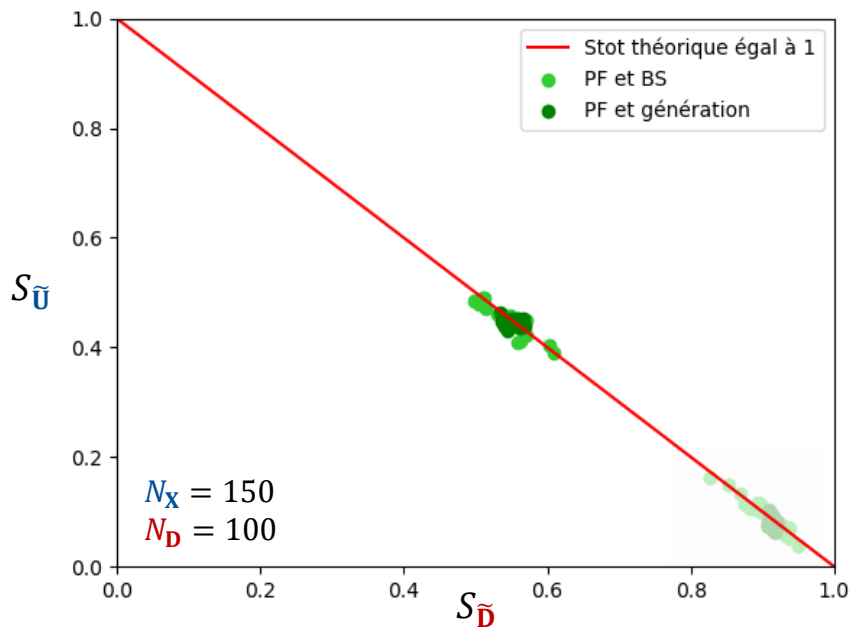
# IV. Application sur cas simple

Prenons le cas test où  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  est l'entrée de la boîte noire avec  $\mathbf{X} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$  et la sortie est  $Y$  telle que  $Y = \varphi(\mathbf{X}) = X_1 + X_2$ .  $N$  a été fixé à  $10^4$  et 25 estimations de chaque indice sont réalisées.



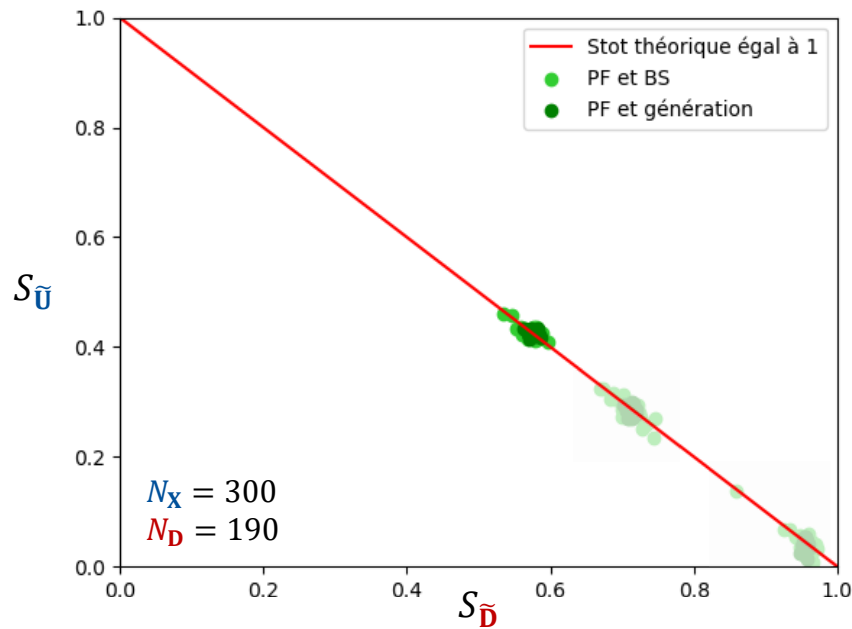
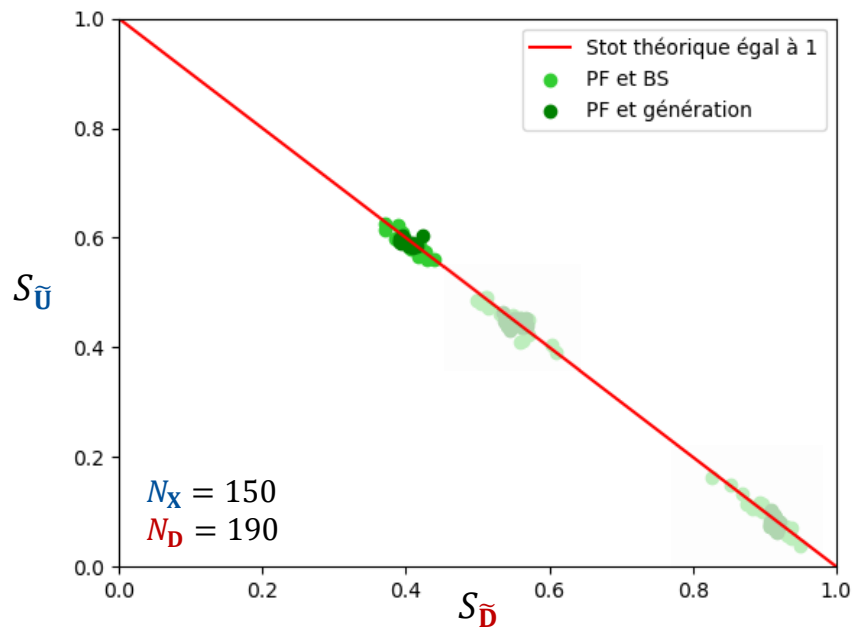
# IV. Application sur cas simple

Prenons le cas test où  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  est l'entrée de la boîte noire avec  $\mathbf{X} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$  et la sortie est  $Y$  telle que  $Y = \varphi(\mathbf{X}) = X_1 + X_2$ .  $N$  a été fixé à  $10^4$  et 25 estimations de chaque indice sont réalisées.



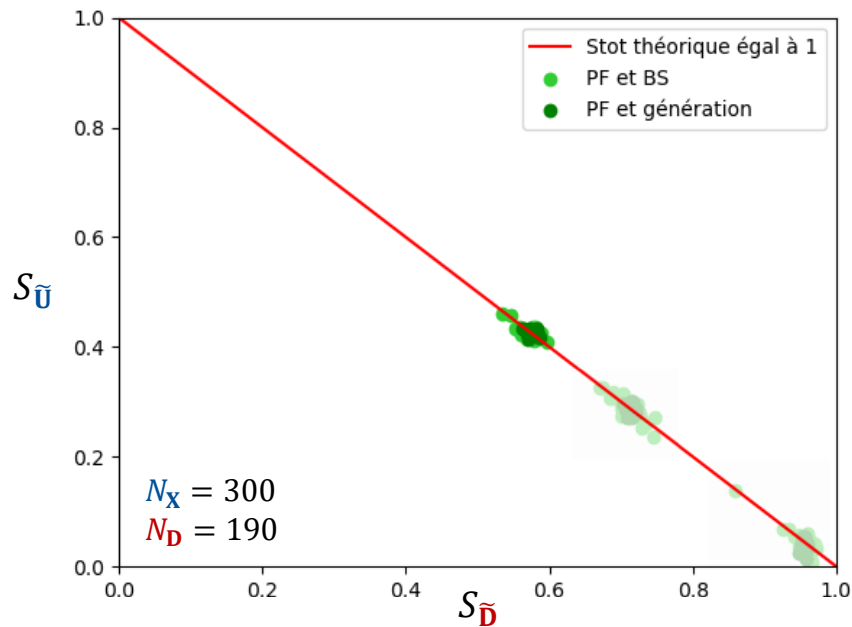
# IV. Application sur cas simple

Prenons le cas test où  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  est l'entrée de la boîte noire avec  $\mathbf{X} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$  et la sortie est  $Y$  telle que  $Y = \varphi(\mathbf{X}) = X_1 + X_2$ .  $N$  a été fixé à  $10^4$  et 25 estimations de chaque indice sont réalisées.



# IV. Application sur cas simple

Prenons le cas test où  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  est l'entrée de la boîte noire avec  $\mathbf{X} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$  et la sortie est  $Y$  telle que  $Y = \varphi(\mathbf{X}) = X_1 + X_2$ .  $N$  a été fixé à  $10^4$  et 25 estimations de chaque indice sont réalisées.



Quand  $N_D$  augmente :

→  $S_{\bar{D}}$  diminue et  $S_{\bar{U}}$  augmente,

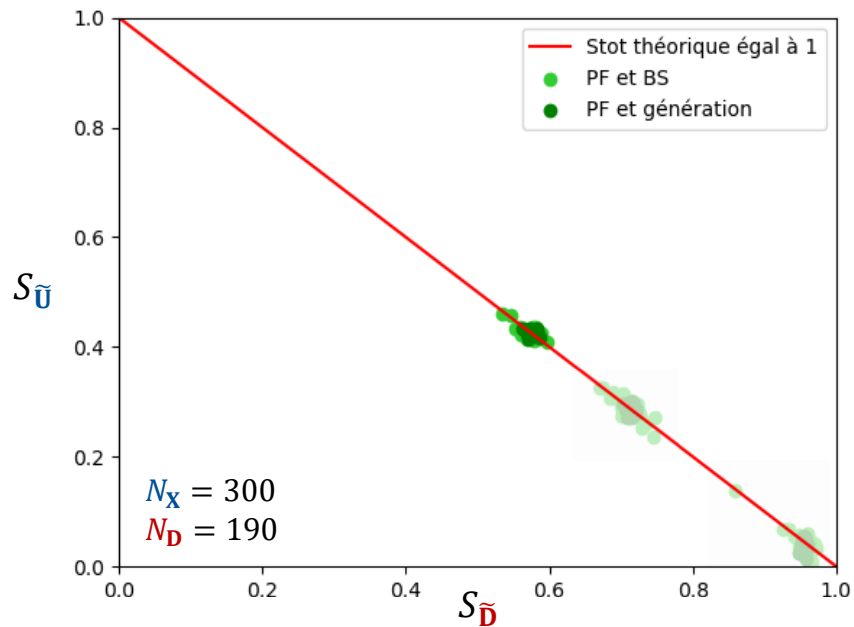
→ la dispersion des estimations avec BS diminue.

Quand  $N_U$  augmente :

→  $S_{\bar{D}}$  augmente et  $S_{\bar{U}}$  diminue.

# IV. Application sur cas simple

Prenons le cas test où  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  est l'entrée de la boîte noire avec  $\mathbf{X} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$  et la sortie est  $Y$  telle que  $Y = \varphi(\mathbf{X}) = X_1 + X_2$ .  $N$  a été fixé à  $10^4$  et 25 estimations de chaque indice sont réalisées.



Quand  $N_D$  augmente :

→  $S_{\bar{D}}$  diminue et  $S_{\bar{U}}$  augmente,

→ la dispersion des estimations avec BS diminue.

Quand  $N_U$  augmente :

→  $S_{\bar{D}}$  augmente et  $S_{\bar{U}}$  diminue.

L'effort d'enrichissement peut être investi dans la source dont l'indice est le plus important.

# Plan

---

- I. Contexte
- II. Estimateurs
- III. Analyse de sensibilité
- IV. Application sur cas simple
- V. Synthèse et perspectives

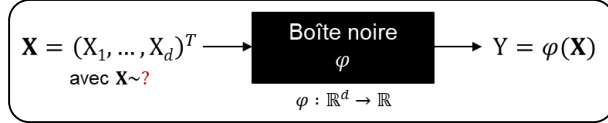


# V. Synthèse et perspectives

---

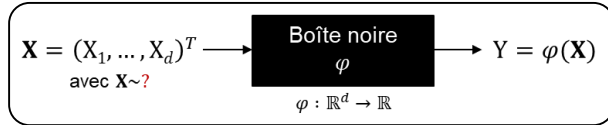
# V. Synthèse et perspectives

## ① Contexte



# V. Synthèse et perspectives

## ① Contexte

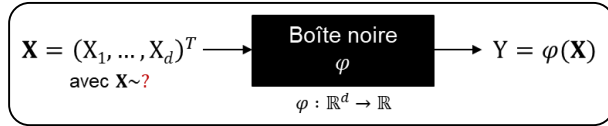


## ① Problématiques

$$\mathbb{E}_{f_{(\mathbf{x}, \mathbf{d})}}(\varphi(\mathbf{X})) = \int_{\mathbf{X}^{N_D}} \int_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{x}) f_{(\mathbf{x}, \mathbf{d})}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) dx d\mathbf{d}$$
$$\hat{\mathbb{E}}_{\hat{f}_{(\mathbf{x}, \mathbf{d})}}(\varphi(\mathbf{X})) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{N_X} \sum_{j=1}^{N_X} \varphi(\mathbf{x}_k^{(j)})$$

# V. Synthèse et perspectives

## ① Contexte



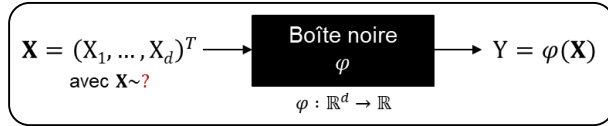
## ① Problématiques

$$\mathbb{E}_{f_{(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{D}})}}(\varphi(\mathbf{X})) = \int_{\mathbf{X}^{N_D}} \int_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{x}) f_{(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{D}})}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}}) dx d\bar{\mathbf{d}}$$
$$\hat{\mathbb{E}}_{\hat{f}_{(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{D}})}}(\varphi(\mathbf{X})) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{N_X} \sum_{j=1}^{N_X} \varphi(\mathbf{X}_k^{(j)})$$

**Compromis essai-simulation**

# V. Synthèse et perspectives

## ① Contexte



## ① Problématiques

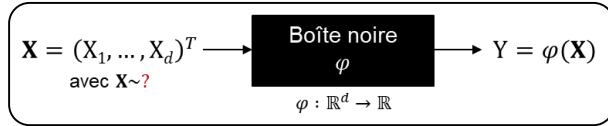
$$\mathbb{E}_{f_{(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}})}}(\varphi(\mathbf{X})) = \int_{\mathbf{X}^{N_D}} \int_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{x}) f_{(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}})}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}}) d\mathbf{x} d\bar{\mathbf{d}}$$
$$\hat{\mathbb{E}}_{\hat{f}_{(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}})}}(\varphi(\mathbf{X})) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{N_X} \sum_{j=1}^{N_X} \varphi(\mathbf{x}_k^{(j)})$$

**Compromis essai-simulation**

② Formulation comme une analyse de sensibilité

# V. Synthèse et perspectives

## ① Contexte



## ① Problématiques

$$\mathbb{E}_{f_{(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}})}}(\varphi(\mathbf{X})) = \int_{\mathbf{X}^{N_D}} \int_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{x}) f_{(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}})}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}}) d\mathbf{x} d\bar{\mathbf{d}}$$
$$\hat{\mathbb{E}}_{\hat{f}_{(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}})}}(\varphi(\mathbf{X})) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{N_X} \sum_{j=1}^{N_X} \varphi(\mathbf{x}_k^{(j)})$$

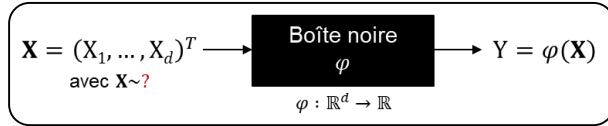
**Compromis essai-simulation**

② Formulation comme une analyse de sensibilité

③ Estimation des indices de Sobol' par Pick-Freeze

# V. Synthèse et perspectives

## ① Contexte



## ① Problématiques

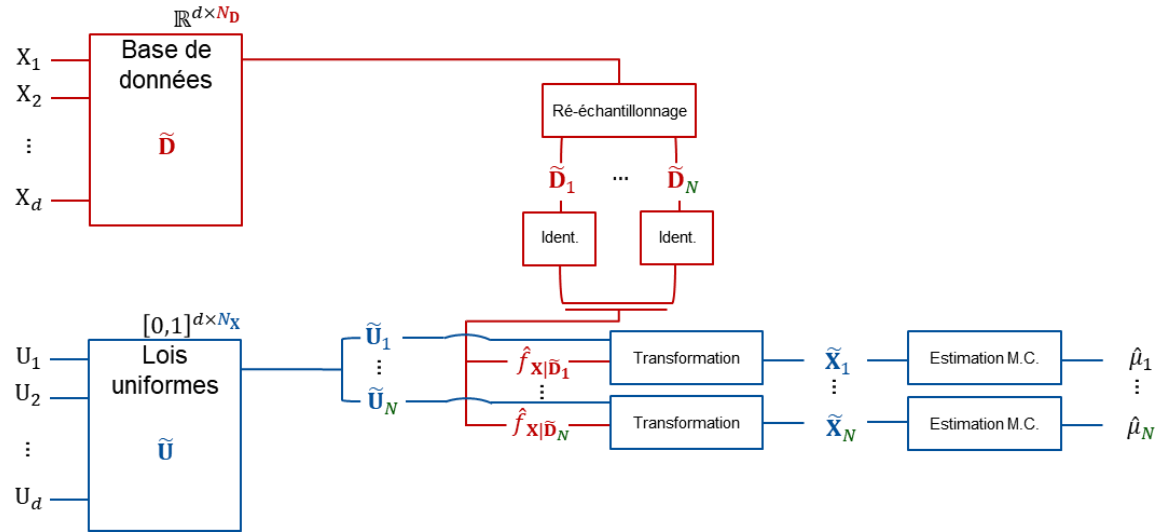
$$\mathbb{E}_{f_{(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}})}}(\varphi(\mathbf{X})) = \int_{\mathbf{X}^{N_D}} \int_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{x}) f_{(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}})}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}}) d\mathbf{x} d\bar{\mathbf{d}}$$
$$\hat{\mathbb{E}}_{\hat{f}_{(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}})}}(\varphi(\mathbf{X})) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{N_X} \sum_{j=1}^{N_X} \varphi(\mathbf{x}_k^{(j)})$$

**Compromis essai-simulation**

- ② Formulation comme une analyse de sensibilité
- ③ Estimation des indices de Sobol' par Pick-Freeze
- ④ Tendence des résultats en adéquation avec les attentes de l'analyse de sensibilité

# V. Synthèse et perspectives

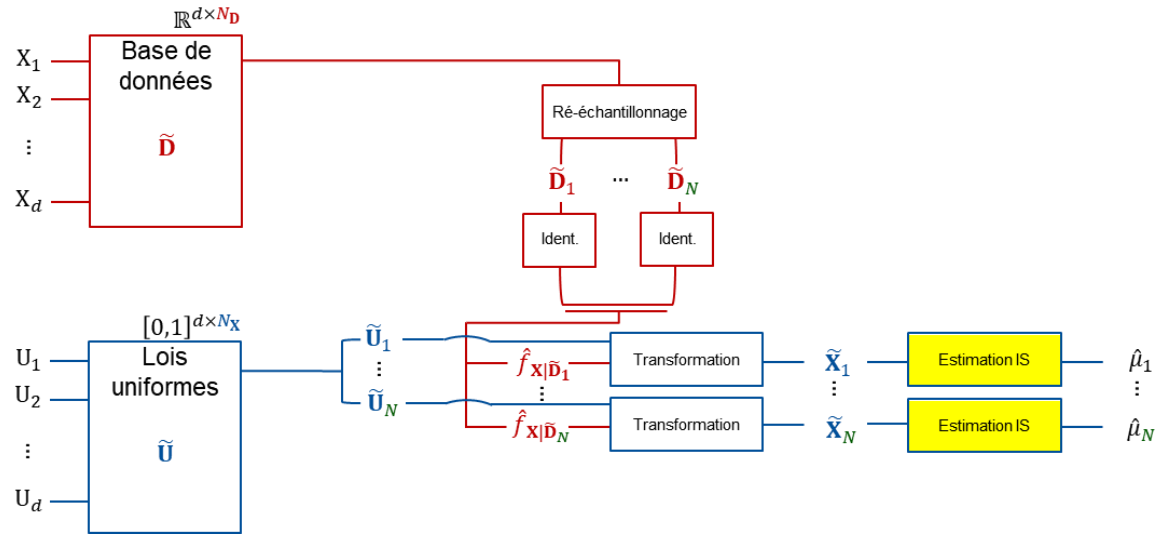
- Recherche d'une analyse « à moindre coût » par le biais de l'échantillonnage préférentiel (IS)
- Influence des méthodes de ré-échantillonnage et des méthodes d'identification
- Etude avec dépendance des variables aléatoires d'entrée et cas tests plus complexes





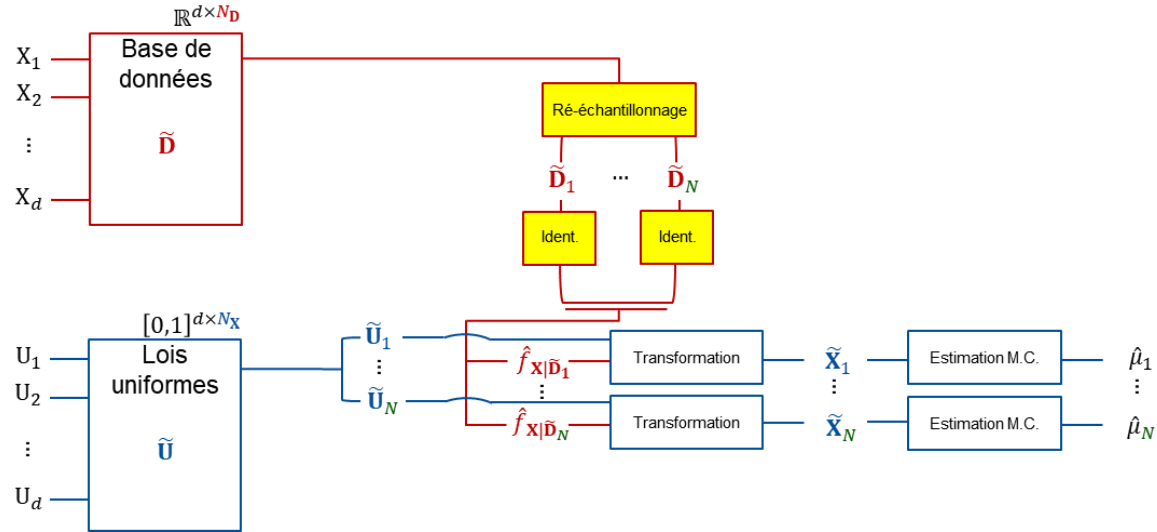
# V. Synthèse et perspectives

- Recherche d'une analyse « à moindre coût » par le biais de l'échantillonnage préférentiel (IS)
- Influence des méthodes de ré-échantillonnage et des méthodes d'identification
- Etude avec dépendance des variables aléatoires d'entrée et cas tests plus complexes



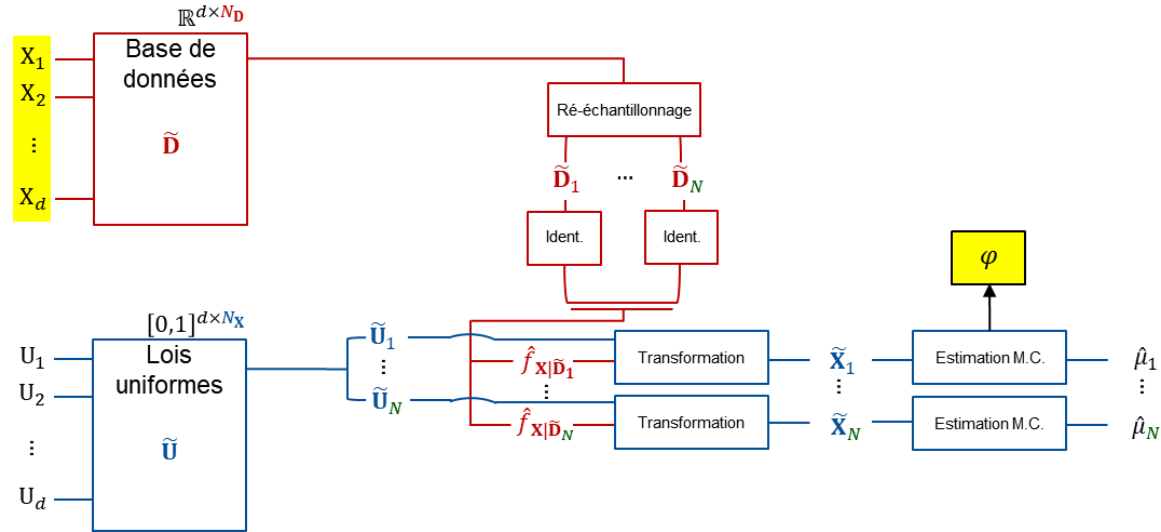
# V. Synthèse et perspectives

- Recherche d'une analyse « à moindre coût » par le biais de l'échantillonnage préférentiel (IS)
- Influence des méthodes de ré-échantillonnage et des méthodes d'identification
- Etude avec dépendance des variables aléatoires d'entrée et cas tests plus complexes



# V. Synthèse et perspectives

- Recherche d'une analyse « à moindre coût » par le biais de l'échantillonnage préférentiel (IS)
- Influence des méthodes de ré-échantillonnage et des méthodes d'identification
- Etude avec dépendance des variables aléatoires d'entrée et cas tests plus complexes



# Références

- [1] SARAZIN, Gabriel. *Analyse de sensibilité fiabiliste en présence d'incertitudes épistémiques introduites par les données d'apprentissage*. 2021. Thèse de doctorat. Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace Toulouse.
- [2] CHABRIDON, Vincent. *Analyse de sensibilité fiabiliste avec prise en compte d'incertitudes sur le modèle probabiliste- Application aux systèmes aérospatiaux*. 2018. Thèse de doctorat. Université Clermont Auvergne(2017-2020).
- [3] SOBOL', Ilya M. *Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates*. Mathematics and computers in simulation, 2001, vol. 55, no 1-3, p. 271-280.
- [4] GAMBOA, Fabrice, JANON, Alexandre, KLEIN, Thierry, et al. *Statistical inference for Sobol pick-freeze Monte Carlo method*. Statistics, 2016, vol. 50, no 4, p. 881-902.